

Szerkesztette:  
**Fülöp Tamás**

# Idő- és térderiváltak anyagtörvényekben



Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10



IDŐ- ÉS TÉRDERIVÁLTAK  
ANYAGTÖRVÉNYEKBEN



*International Society for Rock Mechanics  
Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 Konferencia, Budapest*

# IDŐ- ÉS TÉRDERIVÁLTAK ANYAGTÖRVÉNYEKBE

SZERKESZTETTE

FÜLÖP TAMÁS

*Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest*

ÍRTA

BÉDA GYULA, BÉDA PÉTER, FÜLÖP TAMÁS, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS



MŰEGYETEMI KIADÓ  
2010

SZERKESZTETTE

FÜLÖP TAMÁS

*Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest*

ÍRTA

BÉDA GYULA, BÉDA PÉTER, FÜLÖP TAMÁS, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS

A KUTATÁST ÉS A KÖTET MEGJELENÉSÉT

A MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT,  
AZ ETTE EGYESÜLET A TUDOMÁNY ÉS TECHNOLÓGIA EGYSÉGÉÉRT ÉS  
AZ ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS KUTATÁSI ALAP

TÁMOGATÁSA TETTE LEHETŐVÉ

ISBN 978-963-420-992-8

ISSN 1789-0454

Megjelent a *Műegyetemi Kiadó* gondozásában

[www.kiado.bme.hu](http://www.kiado.bme.hu)

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 11,40 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

*Hungarian Printing House*

Felelős vezető:

Kovács-Sebestyén Szabolcs

©2010 BUDAPEST, BÉDA GYULA, BÉDA PÉTER, FÜLÖP TAMÁS, VÁN PÉTER, VÁSÁRHELYI BALÁZS

## IDŐ- ÉS TÉRDERIVÁLTAK ANYAGTÖRVÉNYEKBEN

### TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ .....	7
--------------	---

#### EGY MÓDSZER AZ ANYAGTÖRVÉNY MEGHATÁROZÁSÁRA (Béda Gyula)

1. BEVEZETÉS .....	9
2. A LAGRANGE-DERIVÁLT .....	10
3. A LEHETSÉGES ANYAGTÖRVÉNY .....	10
4. A SZÜKSÉGES KÍSÉRLETEK .....	11
5. AZ EGYDIMENZIÓS ESET ÁLTALÁNOSÍTÁSA .....	12
IRODALOM .....	13

#### A KÉPLÉKENYSÉG TERMODINAMIKÁJA (Ván Péter)

1. BEVEZETÉS .....	15
2. A KÉPLÉKENYSÉGI ELMÉLETEK RÖVID ÖSSZEFOGLALÁSA .....	16
3. A SÚRLÓDÁS TERMODINAMIKÁJA .....	24
4. A REOLÓGIA TERMODINAMIKAI ELMÉLETE - KIS DEFORMÁCIÓK .....	30
5. A KÉPLÉKENYSÉG TERMODINAMIKAI ELMÉLETE - KIS DEFORMÁCIÓK .....	37
6. KÖVETKEZTETÉSEK ÉS MEGJEGYZÉSEK .....	47
5. KÖSZÖNETMONDÁS .....	47
IRODALOM .....	48

#### AZ ANYAGI INSTABILITÁS VIZSGÁLATÁNAK LEHETŐSÉGEI (Béda Péter)

BEVEZETÉS .....	51
AZ ANYAG STABIL VAGY INSTABIL ÁLLAPOTA A KONTINUUM MECHANIKÁBAN .....	53
DINAMIKAI RENDSZEREK ÉS A BIFURKÁCIÓELMÉLET .....	56
KONTINUUM ALAPEGYENLETEI KIS ALAKVÁLTOZÁS ESETÉRE.....	59
STABILITÁSVESZTÉSI MÓDOK, STATIKUS ÉS DINAMIKUS BIFURKÁCIÓ .....	61
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS .....	64
IRODALOM .....	64

A HARMADFOKÚ, VÉGES DEFORMÁCIÓS RUGALMASSÁGTAN TERMODINAMIKAI  
KONZISZTENCIÁJÁRÓL  
(*Ván Péter*)

1. BEVEZETÉS .....	69
2. KONTINUUMOK A PIOLA-KIRCHHOFF-RENDSZERBEN .....	72
3. EGYSZERŰ HULLÁMOK .....	78
4. ÖSSZEFOGLALÁS .....	79
5. KÖSZÖNETEK .....	80
IRODALOM .....	81

A KÖZETTESTEK MINŐSÉGI JELLEMZÉSÉNEK ÉS KÁROSODOTTSÁGÁNAK VISZONYÁRÓL  
(*Ván Péter – Vásárhelyi Balázs*)

1 BEVEZETÉS .....	85
2 A KÁROSODÁS BEVEZETÉSE .....	87
3 DINAMIKAI VIZSGÁLATOK .....	93
4 KÖVETKEZMÉNYEK .....	94
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS .....	96
IRODALOM .....	96

VÉGES RUGALMAS ÉS KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK LEÍRÁSA  
(*Fülöp Tamás – Ván Péter*)

1. ELŐSZÓ .....	99
2. BEVEZETÉS .....	100
3. A KÖZEGKINEMATIKA SZOKÁSOS TÁRGYALÁSA .....	101
4. A KÖZEGKINEMATIKA SZOKÁSOS TÁRGYALÁSÁNAK PROBLÉMÁI .....	103
5. MÓDSZERTAN A PROBLÉMÁK MEGOLDÁSÁHOZ .....	114
6. A SZÜKSÉGES ESZKÖZÖK, ÉS AMIKHEZ SZÜKSÉGESEK .....	120
7. A RUGALMAS ALAKVÁLTOZÁSOK LEÍRÁSA .....	135
8. A KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁSOK LEÍRÁSA .....	144
9. TOVÁBBI TENNIVALÓK .....	147
KÖSZÖNETMONDÁS .....	148
IRODALOM .....	149

## ELŐSZÓ

A kötetben található előadások a MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT keretében folytatott kutatási program elmúlt évi eredményeinek egy részét foglalják össze.<sup>1</sup> A tanulmányok a Nemzetközi Kőzetmechanikai Társaság (ISRM – INTERNATIONAL SOCIETY FOR ROCK MECHANICS) Magyar Nemzeti Bizottsága által szervezett hazai konferenciájára készült előadások, amelyek logikai rendbe szerkesztve kerültek jelen kötetbe. Ez a könyv a hatodik az éves kutatások beszámolójából.

Az itt közölt előadások mögötti közös vezérfonal az, amit a kötet címe is összefoglal: „Idő- és térderiváltak anyagtörvényekben”. Miért és hogyan kellhet és lehet a kontinuumok állapotát jelző mennyiségeket összekapcsoló konstitúciós összefüggésben, anyagtörvényben e mennyiségek idő- és térderiváltjait is szerepeltetni? Mik az indokok és milyenek a következmények? Mik a kinematikai, mechanikai, termodinamikai aspektusok, mik az elméleti és kísérleti vonatkozások?

Jelen munkák különböző irányokból törekednek ebbe a közös irányba. Izgalmas végigtekinteni a felmerülő kulcsszavak színes kavalkádján: stabilitás és disszipáció, de instabilitás, bifurkáció és tönkremenetel; mikroszerkezet és kontinuumviselkedés, késleltetések és korrelációk, szilárdság és képlékenyedés, téridő és anyagi sokaság, rezgések és hatásterjedési sebességek, lineáris és nemlineáris jelenségek, variációs elvek és differenciálegyenletek, analitikus és numerikus vizsgálatok.

A szerzők nevében is megköszönve mindazoknak, akik értékes észrevételeikkel és javaslataikkal segítették az itt bemutatott eredmények megszületését és ismertetését, kellemes és remélhetőleg tartalmas szakmai olvasmányélményt kíván az Olvasónak:

*Budapest, 2010. március 18.*

A SZERKESZTŐ

---

<sup>1</sup> A továbbiak a Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9. kötetében található.





## EGY MÓDSZER AZ ANYAGTÖRVÉNY MEGHATÁROZÁSÁRA

BÉDA GYULA

BME MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK, BUDAPEST  
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

*A kontinuum mechanika egyik fontos egyenletcsoportját az anyagtörvények képezik. A dolgozat a belső erőrendszer virtuális munkájának (vagy teljesítményének) középpontba állításával tesz javaslatot az anyagtörvény egy lehetséges meghatározására.*

### 1. BEVEZETÉS

Az anyagtörvény elnevezés értelmét legegyszerűbben matematikai nézőpontból lehet megmagyarázni. A kontinuumokra vonatkozó feladatok felírására szolgálnak a mozgás- és a kinematikai egyenletek, mint ismert egyenletek. Ezekben az egyenletekben nagyobb az ismeretlen függvények száma, mint az egyenleteké, így szükség van további egyenletekre, amelyek az anyag terhelés során mutatott viselkedéséből vonhatók le. Ezeket az egyenleteket szokás anyagtörvénynek nevezni. Az anyagtörvény meghatározásához szükség van egy megfelelő elméletre és olyan kísérletekre, amelyek kiegészítik, ellenőrzik, igazolják, vagy elvetik az elméletet.

Az anyagtörvény meghatározásának módszere az alábbi alkotórészekből áll

I. meghatározott ismert vagy felépített elmélet, amely

- (a) kiválasztja, vagy visszaigazolja a felvett független változóit az anyagtörvény számára,
- (b) feltételeket ad az anyagtörvény lehetséges függvény szerkezetére,
- (c) lehetővé teszi az anyag általános tulajdonságainak érvényesítését.

II. a megfelelő kísérletek elvégzése

III. az elméleti és kísérleti eredmények összevetése, egyiknek a másikkal való kiegészítése,

IV. a kísérletek rendszerint egydimenziós terhelési esetre vonatkoznak, ehhez kell az elméletet is igazítani, felmerül az eredmények általánosítása.

## 2. A LAGRANGE-DERIVÁLT

A I. elmélet matematikai leírásához szükséges a Lagrange derivált fogalma. Nézzük az

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} F(u(x,t), \dot{u}, u') dt dx$$

integrál variációját, amely úgy keletkezik, hogy az  $u(x,t)$  függvényt változtatjuk, variáljuk, ezzel az  $I$  variációja a  $\delta I$  az alábbi

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \right] dt dx.$$

Az  $\dot{u}$  és  $u'$  az  $u$  idő és hely szerinti deriváltja.

Használjuk a következő képleteket  $\delta \dot{u} = (\delta u)^\bullet$  és  $\delta u' = (\delta u)'$ . Gondoljuk meg, hogy a

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \delta u \right)^\bullet - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right)^\bullet \delta u.$$

Hasonló módon

$$\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' = \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right)' - \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right)' \delta u$$

Ezeket a kifejezéseket a  $\delta I$  képletébe helyettesítve a  $( )^\bullet$  és  $( )'$  tagokat integrálva az idő és a hely szerint és figyelembevéve, hogy ezek értéke nulla végülis

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dt dx.$$

az integráljel alatt a  $\delta u$ -val szorzott kifejezés az  $F$  Lagrange-deriváltja (*Schouten*), azaz

$$\mathfrak{L} F = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right)$$

Az  $F$  az  $u$  mellett még más függvényváltozója is lehet de, az integrált csak az  $u$  szerint variáljuk.

## 3. A LEHETSÉGES ANYAGTÖRVÉNY

Azt az anyagtörvényt, amely az 1. pont I. feltételének megfelel, lehetséges anyagtörvénynek nevezzük.

Meg kell tehát választani a megkívánt elméletet. A mechanikában sok alaptörvény variációs elv alakjában is meg van fogalmazva, ezek rendszerint tartalmazzák az

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \sigma \cdot \delta \varepsilon \, dx \, dt$$

kifejezést, ahol  $\sigma$  a feszültség,  $\varepsilon$  a fajlagos nyúlás, a  $t$  és  $x$  az idő illetve a hely koordináták. Feltehetjük, az előzőeket egybevetve, hogy ha az előzőekben szereplő  $u$  helyére az  $\varepsilon$  kerül, akkor a  $\sigma$  valamilyen  $W$  függvény Lagrange-deriváltja, azaz

$$\sigma = \text{fW} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon'} \right).$$

Lokális reológiai testet tekintve ez azt jelenti, hogy

$$W = W(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, g)$$

itt a  $g$  egy tetszőleges függvény. A lokális azt jelenti, hogy egy adott helyen meghatározott anyagtörvény a test minden pontjában ugyanaz, a reológiai jelző pedig előtérbe helyezi az időben lejátszódó folyamatok anyagi vonatkozásait.

Az itt elemi formában kifejtett elméletet MINDLIN használja az anyagtörvény előre felvett változóit figyelembevéve. Most az előre felvett változók legyenek  $\varepsilon, \dot{\varepsilon}, g$  és az elmondottak alapján

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)$$

vagyis

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \dot{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} - \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{\varepsilon}^2} \ddot{\varepsilon} - \frac{\partial^2 W}{\partial g \partial \dot{\varepsilon}} \dot{g}.$$

Legyen  $g$  egyenlő a  $\sigma$  feszültséggel, és nem akarjuk, hogy a jobb oldalon a  $\sigma$  szerepeljen, ezért  $W = U(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) - f(\sigma)\dot{\varepsilon}$ , s ezzel

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \quad \frac{\partial W}{\partial \dot{\varepsilon}} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\varepsilon}} + f(\sigma)$$

végül a lehetséges anyagtörvény

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon \partial \dot{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{\varepsilon}^2} \ddot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma},$$

#### 4. A SZÜKSÉGES KÍSÉRLETEK

Az előzőekben kifejtett elméletben az anyagtörvény változóit ( $W, U, változóit$ ) felvettük a törvény alakját a Lagrange-derivált megsabta, kísérletekre van szükség, hogy az így kapott lehetséges anyagtörvény lehetséges-e, és milyen értékűek vagy milyen függvények a változók szorzói. Ezek eldöntéséhez kísérletekre van szükség. Ilyen kísérletek lehetnek, esetünkben, az anyag kúszásának és ernyedésének vagy relaxációjának a megfigyelése. Az első esetben a feszültség, a másodikban a nyúlás állandó.

Más hasonlóan általános tulajdonság az is, hogy az anyagot érő valamilyen fizikai hatás a hatás helyén jelentkezik először más helyen később vagy egyáltalán nem. A lehetséges anyagtörvényt a gondosan elvégzett kísérletek minősítik

### EGY PÉLDA

Legyenek a lehetséges anyagtörvényben az  $\dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dot{\sigma}$  együttthatói állandók, azaz

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} - A' \dot{\varepsilon} - B \ddot{\varepsilon} - H \dot{\sigma}.$$

Ez az egyenlet  $W$  megfelelő felírásával lehetséges, amelyre BÉDA ad javaslatot az „Irodalom” szakaszban megnevezett cikkében.

Még tovább egyszerűsítve

$$\sigma = E\varepsilon - A\dot{\varepsilon} - B\ddot{\varepsilon} - H\dot{\sigma}.$$

A kúszás esetében  $\sigma = \sigma_0 = const$ , vagyis

$$\sigma_0 = E\varepsilon - A\dot{\varepsilon} - B\ddot{\varepsilon}.$$

Ha a kúszási kísérlet során kapott  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  függvény megoldása a fenti differenciálegyenletnek, akkor az  $E, A, B$  állandók között kapcsolatokat találunk.

Az ernyedés vagy relaxáció esetében az  $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$ , így a differenciálegyenlet

$$E\varepsilon_0 = \sigma + H\dot{\sigma},$$

és ha a relaxációs kísérlet során kapott  $\sigma = \sigma(t)$  függvény az egyenlet megoldása lehet, akkor kapcsolatot nyerünk a  $H$  és  $E$  között.

A MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT az itt bemutatott anyagtörvényt vizsgálja és alkalmazza gyakorlati feladatok megoldására, a kutatás eredményeiről a *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár* sorozatban rendszeresen beszámolnak.

## 5. AZ EGYDIMENZIÓS ESET ÁLTALÁNOSÍTÁSA

Az egytengelyű feszültségi állapot vizsgálata során kapott eredmények általánosítására a 2. pont  $I$  integráljának értelmezése ad lehetőséget. A használt, idézett

integrál a belső erőrendszer munkájának időszerinti integrálja, amelyet a belső erőrendszer hatásfüggvényének nevezhetjük (*Budó*). Ez a hatásfüggvény általános esetben

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \nabla \circ \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{g}) dV dt$$

alakú, amelyből a feszültségi tenzor

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) - \nabla \cdot \frac{\partial W}{\partial (\nabla \circ \boldsymbol{\varepsilon})}$$

és így tovább.

Lehet az  $I$  integrál a belső erőrendszer teljesítményének időszerinti integrálja, vagyis a belső erőrendszer munkája. Ebben az esetben a  $W$  Lagrange-deriváltja a negatív előjelű feszültségi tenzor időszerinti deriváltja.

## IRODALOM

BUDÓ, Á.: *Mechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest 1953.

SCHOUTEN, J.A.: *Tensor analysis for physicists*, Oxford, 1951.

MINDLIN R.D.: Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *Int. J. of Solids Structures*, **1**. (1965) 417—438.

ASSZONYI, CS, et al.: *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, Műegyetemi Kiadó, **3** (2006), **5** (2007), **6, 8** (2008), Budapest

BÉDA, GY.: Generalized Mindlin's method for the determination of constitutive equations of solids, *J. of Computational and Applied Mechanics*, **6**. (2005) 153—158.



## A KÉPLÉKENYSÉG TERMODINAMIKÁJA

*Ván Péter*

KFKI, RMKI, ELMÉLETI FIZIKA FŐOSZTÁLY, BUDAPEST,  
BME, ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST,  
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

### 1. BEVEZETÉS

Ebben az írásban a képlékeny és a reológiai, (hibás szóhasználattal viszkoelasztikus) anyagmodellek kapcsolatát tárgyaljuk a nemegyensúlyi termodinamika alapján. Annak érdekében, hogy mondanivalónk könnyebben érthető és áttekinthetőbb legyen röviden összefoglaljuk a legfontosabb fogalmakat a klasszikus rugalmasságtanból, illetve a klasszikus és a hagyományos termodinamikai háttérű képlékenységtanból.

Többféle képlékenységi elmélet áttekintése után részletesen vizsgáljuk a ZIEGLER-től eredő klasszikus termodinamikai képlékenységet, amely a legelterjedtebb és számos szempontból a legjobbnak tekinthető. Itt a képlékeny deformáció egy speciális belső változó, ami csökkenti a termostatikai feszültséget, vagyis az egyensúlyi állapotban lévő közeg feszültségét. A képlékenységi feltételt az ONSAGER-féle vezetési együtthatóknak a belső változó sebességének abszolút értékétől való függése hordozza.

Ahogy a csúszási súrlódás kontinuumokra történő általánosítása vezet a viszkozitáshoz, és speciálisan izotrop folyadékok esetén a NAVIER-STOKES-egyenlethez, illetve szilárd testek esetén a különféle viszkoelasztikus elméletek alapegyenleteihez, ugyanúgy kaphatjuk a tapadási súrlódás kontinuummechanikai általánosításaként a képlékenységi különféle elméleteit. Éppen ezért a termodinamikai elmélet ismertetése előtt — és a klasszikus és termodinamikai képlékenység különbségének teljesebb megvilágítása céljából — kitérünk a súrlódás és csillapítás termodinamikai leírásaira.

A termodinamikai képlékenységet teljesen a nemegyensúlyi termodinamika fogalomrendszerén belül tárgyaljuk, eltérően a szokott, a mechanikában kialakult fogalmakra alapozott tárgyalástól. A nemegyensúlyi termodinamika a képlékeny alakváltozásokkal járó folyamatok időbeli lefolyásának leírását teszi lehetővé. A képlékeny és a rugalmas deformáció időbeli változása kúszási és feszültségrelaxációs jelenségekkel együtt leírható.



Homogén testek példáján — közönséges differenciálegyenletek megoldásával — mutatjuk meg a disszipatív hatások numerikus regularizáló hatását.

## 2. A KÉPLÉKENYSÉGI ELMÉLETEK RÖVID ÖSSZEFOGLALÁSA

### 2.1. A KLASSZIKUS KÉPLÉKENYSÉGELMÉLET

A képlékenység elméleteiben a teljes alakváltozást rugalmas és képlékeny részre szokták osztani. A nagy alakváltozásos elméletekben a teljes alakváltozást a rugalmas és a képlékeny alakváltozás szorzataként, vagy összegeként állítják elő. A kis deformációs elméletekben mindkét feltevés a deformációk összegződésére vezet. Mi a továbbiakban a kis deformációs elmélettel foglalkozunk, ezért a teljes  $\epsilon_{ij}$  deformációt (strain)  $\epsilon_e^{ij}$  rugalmas és  $\epsilon_p^{ij}$  képlékeny komponensek összegére bontjuk:

$$\epsilon^{ij} = \epsilon_e^{ij} + \epsilon_p^{ij}, \quad (1)$$

ahol mindkét deformáció másodrendű tenzor. A későbbiekben megmutatjuk, hogy egy termodinamikai belső változó milyen feltételekkel értelmezhető képlékeny deformációként. Itt és a továbbiakban a tenzorokat alsó és felső indexekkel jelöljük, és az egy szorzaton belül ismételt indexek összegzést jelentenek, az EINSTEIN-féle összegzési szabálynak megfelelően. Általában ügyelünk az alsó és felső indexek megfelelő használatára is.

A rugalmas feszültséget a termosztatikából ismert módon termodinamikai potenciálfüggvényből származtatjuk. Ez a termodinamikai alapállás megfelel a mechanikában hiperrugalmasságként ismert elméletcsaládnak. Mivel az entrópia és rajta keresztül a termodinamikai potenciálok létezése a második főtétel részeként természettörvény, ezért termodinamikai szempontból az ilyen elméletek kiténtetettek. Mechanikai elméletekben a leggyakrabban használt termodinamikai potenciál az  $F$  szabadenergia-függvény (illetve sűrűség). Ennek segítségével

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_e^{ij}}. \quad (2)$$

A vonatkozó GIBBS-reláció  $dF = SdT + \sigma_{ij}d\epsilon^{ij}$ , ahol  $S$  az entrópia,  $\sigma_{ij}$  a feszültség és  $T$  a hőmérséklet. Ideálisan rugalmas anyagok esetén

$$\sigma_{kl} = C_{ijkl}\epsilon_e^{ij}, \quad (3)$$

ahol a  $C_{ijkl}$  negyedrendű rugalmassági tenzor állandó, továbbá a szabadenergiából történő származtathatóság követelménye miatt  $C_{ijkl} = C_{klij}$ . Ideálisan rugalmas izotróp anyag esetén  $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \nu\delta_{ik}\delta_{jl}$  és a szabadenergia

$$F(\epsilon_e^{ij}) = \frac{\lambda}{2}((\epsilon_e)_i^i)^2 + \mu(\epsilon_e)_{ij}\epsilon_e^{ij}. \quad (4)$$

Itt  $\lambda$  és  $\mu$  a LAMÉ-állandók,  $\delta_{ij}$  pedig a másodrendű egységtenzor. A képlékenységi határt egy ún. folyási felület (yield surface) határozza meg a feszültségtérben. Ezt a *folyásfüggvény* segítségével adják meg, a 0 értékéhez tartozó szintfelülettel:

$$f(\sigma_{ij}, \dots) = 0.$$

Az  $f$  függvény más fizikai mennyiségektől is függhet. Képlékeny alakváltozás akkor következik be, ha a feszültség eléri a folyásfelületet. Képlékeny alakváltozás közben ott is marad. A folyásfelületen "belül", ahol  $f(\sigma_{ij}, \dots) < 0$ , az anyag rugalmasan viselkedik, a folyási felületen kívüli rész, ahol  $f(\sigma_{ij}, \dots) > 0$ , nem érhető el. A folyási függvény nincs egyértelműen meghatározva, egyetlen szintfelülete lényeges, ezért a fenti tulajdonságokkal minden monoton függvénye rendelkezik. Többnyire implicit módon, de feltételezik továbbá, hogy a folyási felület időben állandó, azaz

$$\dot{f} = 0. \quad (5)$$

Ez tulajdonképpen rögzíti a folyási határ valamelyik változójának evolúciós egyenletét.

A képlékeny deformáció változását a *folyási törvény* (flow rule) adja meg, amit általában a  $g(\sigma_{ij}, \dots)$  *képlékeny potenciál* segítségével írják fel, feltételezve, hogy a képlékeny deformáció változása merőleges a képlékeny potenciál szintfelületeire:

$$(\dot{\epsilon}^p)^{ij} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6)$$

ahol  $\Lambda$  pozitív skalár képlékeny szorzó. Ha  $f \equiv g$ , akkor *kapcsolt vagy asszociatív folyásról* (associated flow), illetve normalitásról beszélünk. A képlékeny potenciált sokszor egy segédváltozóval lenullázzák a folyásfelület azon pontjaiban, ahol a képlékeny folyás történik, felhasználva a szintfelületes meghatározás miatti határozatlanságot.

A képlékeny deformáció mértékének meghatározására változatos elképzelések vannak. Leggyakrabban feltételezik, hogy a *folyásfüggvény* egy  $\xi$  *keményedési (hardening) paramétertől* függ. Ha a keményedési paraméter egyedül a képlékeny deformáció függvénye, akkor  $\xi$  kiküszöbölhető a *folyásfüggvényből*, és *deformációs keményedésről* (strain hardening) beszélnek. Máskor ugyan a keményedési paraméter nem küszöbölhető ki, de rá vonatkozóan fejlődési egyenleteket írhatunk fel, például  $\dot{\xi} = x(\sigma_{ij}, (\epsilon^p)^{ij}, \xi, (\dot{\epsilon}^p)^{ij})$  formában, ahol az egyenlet jobb oldalán álló  $x$  függvény mutatja a fejlődési egyenlet szokásos változóit. A keményedési paraméter legtöbbször skalár. Ha a keményedés változását éppen a képlékeny teljesítmény okozza, azaz  $x = \dot{W}^p = \sigma_{ij}(\dot{\epsilon}^p)^{ij}$ , akkor beszélünk *munkakeményedésről* (work hardening).

Mindezek a feltételek együtt megadják a képlékeny szorzót és megadják a rugalmasági paraméterek megváltozott, képlékeny tartományban érvényes értékeit is. Nézzünk erre két példát.

a) *Ideális és nem kapcsolt képlékenység* esetén, amikor a folyási függvény csak a feszültségtől függ, azaz  $f = f(\sigma_{ij})$ :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_e^{kl} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \left( \dot{\epsilon}^{kl} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right). \quad (7)$$

Ahol az előbb már bevezetett negyedrendű rugalmassági tenzort az általános nemlineáris esetben a szabadenergia második deriváltjaként  $C_{ijkl} = \frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon_e^{ij} \partial \epsilon_e^{kl}}$  módon értelmezzük. Ebből (5) alapján:

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}^{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}}. \quad (8)$$

Ezek után a feszültség megváltozása

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}^{kl} - \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abcd} \dot{\epsilon}^{cd}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}} \right) C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (9)$$

Kiemelve  $\dot{\epsilon}^{ij}$ -t leolvashatjuk a képlékeny viselkedés tartományában érvényes módosított rugalmassági modulust:

$$\hat{C}_{ijkl} = C_{ijkl} - \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnr} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}} \right) C_{ijcd} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{cd}}. \quad (10)$$

*Deformációs keményedés* esetén a folyási felület a feszültségnek is függvénye, ezért írhatjuk, hogy

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_p^{ij}} \dot{\epsilon}_p^{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \epsilon_p^{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 0.$$

Itt behelyettesítettük a (6) folyási törvényt. Ezután akár eljárhatunk hasonlóan is, mint az előbb, de esetleg kényelmesebb lehet a a feszültségnövekményekre alapozva számolni. Azaz a képlékenységi szorzó meghatározására a fenti egyenlőségből adódó következő formulát használjuk:

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \epsilon_p^{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{h}, \quad (11)$$

ahol a  $h = - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_p^{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$  kombinációt *keményedési modulusnak* hívják. Ezután a rugalmassági tenzor helyett annak inverzét, a  $c^{ijkl}$  merevségi tenzort fogjuk használni, amelyre definíciójából következően igaz, hogy:

$$\epsilon_e^{ij} = c^{ijkl} \sigma_{kl}.$$

Természetesen a merevségi tenzor is származtatható potenciálból. Ennek segítségével írhatjuk, hogy

$$\dot{\epsilon}^{ij} = c^{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} - \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}. \quad (12)$$

Ezért aztán a képlékeny tartományban érvényes merevségi tenzort könnyedén kiolvashatjuk:

$$\hat{c}^{ijkl} = c^{ijkl} + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \epsilon_p^{mn}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}. \quad (13)$$

A klasszikus képlékenység elméletében csak erre van szükség, a feszültség és a deformáció kapcsolatának úgynevezett *növekményes* (incremental) formáira, mint (9), vagy (12). A végeelem-programoknak ennyi elég. Annak ellenére, hogy látszólag időderiváltak szerepelnek benne (9) vagy (12) csak nagyon korlátozott feltételekkel vonatkoztatható valódi időbeli változásokra, a rugalmassági állandók csökkenését adja meg adott feszültség-szint elérésekor.

Összefoglalva az eddigieket, egy klasszikus képlékenységlelmélet feltételezi, hogy

1. A deformáció felbontható képlékeny és rugalmas komponensekre.
2. A képlékeny viselkedés határát kritikus feszültségekkel jellemezhetjük, Ennek megfelelően a feszültségtérben definiált folyásfüggvényt egy szintfelületével adjuk meg,  $f(\sigma_{ij}, \dots) = 0$  módon. Ennek definíciója tartalmazza a képlékeny deformáció irreverzibilitását, azaz azt a feltevést, hogy a képlékeny deformáció egyúttal maradó deformáció, ha egyszer fellépett, akkor magától nem csökken.
3. A képlékenységi határ az (5) összefüggés szerint állandó.
4. Létezik a  $g(\sigma_{ij}, \dots)$  képlékeny potenciál. Azaz a képlékeny deformáció növekményeinek viszonyát a (6) folyási szabály alapján - eléggé speciális módon - jellemezhetjük (ez a PERZYNA-elmélet lényege).
5. Létezik valamilyen szabály a képlékeny deformáció nagyságának meghatározásához (pl. deformációs képlékenyedés, vagy a keményedés fejlődési egyenlete).

Mindezek előtt, a (2) összefüggés formájában adott a termodinamikai háttér - hiszen a szabadenergia létezése az entrópia bevezethetőségét feltételezi - az egyensúlyi feszültség és a rugalmas deformáció viszonyának megadására.

Termodinamikai szemmel vizsgálva a fenti feltevérendszer, érdekes, hogy a többi empirikusan megadandó függvény és közvetlen tapasztalati szabály mellett a (2) összefüggést, a szabadenergia, azaz tulajdonképpen az entrópia létezésének feltevését is gyengíteni szokták valamilyen feszültség-deformáció függvény feltételezésével, annak potenciálból történő származtathatósága nélkül. Erre a motivációt még TRUESDELL és NOLL

[1, 3] adta a hiporugalmassági elképzelésükkel, akik így illesztették a reológiai jelenségeket a mechanikához. A hiporugalmasság a feszültség növekményére vonatkozóan posztulál függvénykapcsolatot

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ij}(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}). \quad (14)$$

Ennek mintájára jött létre KOLYMBAS hipoképlékenységnek nevezett elmélete. Ebben elhagyjuk a képlékeny potenciált is és a képlékeny deformáció meghatározására is egy ilyen függvényt keresünk (ami természetesen nem lineáris és legfeljebb az anyag szimmetriái szorítják meg) [4]. A hiporugalmasságban és hipoképlékenységben a termodinamikai követelményeket csak nagyon nehézkesen adhatjuk meg. A továbbiakban látni fogjuk, hogy a (14)-hoz hasonló, a feszültség időderiváltját tartalmazó egyenleteket viszont a nemegyensúlyi termodinamika segítségével, matematikailag is következetesen és könnyedén levezethetünk.

## 2.2. A TERMODINAMIKAI KÉPLÉKENYSÉGELMÉLET

A klasszikus képlékenységnek a termodinamika második főtételehez való viszonya nem tisztázott. Sok anyagra nem tudjuk, hogy a folyási és képlékeny potenciálra pontosan miféle követelményeket kellene még kikötnünk, hogy képlékenyedő anyagokkal se lehessen másodfajú peripétum mobilét létrehozni, illetve a képlékeny anyagfüggvényeket tartalmazó kontinuummechanikai modellek termodinamika egyensúlya aszimptotikusan stabil legyen. A klasszikus képlékenység alapján még az sem világos, hogy a mechanikai hiszterézis egyáltalán irreverzibilis jelenség-e. Számos termodinamikai elmélet létezik különféle hiányosságokkal.

Az első jelentős termodinamikai elmélet, RICE belső változós elképzelése [5] a második főtételehez köti, abból bizonyítja a normalitást. Ez ma is az egykristály-képlékenység termodinamikai alapja, minden egyes diszlokációhoz különböző belső változókat rendelve.

A makroszkopikus képlékenység klasszikus termodinamikai elmélete egyetlen belső változóra - a képlékeny deformációra - alapuló sajátos nemegyensúlyi termodinamikai elmélet. Az elmélet HANS ZIEGLERTŐL ered [6], és a francia iskola [7, 8] dolgozta ki (DUHEM műveiből is már kikövetkeztethető [2].)

A termodinamikai képlékenységelméletben a képlékeny deformációt termodinamikai belső változónak tekintjük és fejlődési egyenletét az entrópiaprodukció egy részeként azonosított disszipációs függvényből származtatjuk. A vezetési egyenletek a termodinamikai áramokra bevezetett disszipációs potenciál formájában jelennek meg. A disszipációs potenciál egyben képlékeny potenciál és folyási függvény is — a termodinamikai képlékenység alapkiépítésben kapcsolt elmélet. A legfontosabb posztulátuma, hogy a disszipá-

ciós potenciál a termodinamikai áramoknak nem kvadratikussal, hanem elsőrendű homogén függvénye (ideális képlékenységi eset). A termodinamikai képlékenységi természetes módon tartalmazza a viszkózus hatásokat is, az ideális képlékenységi egyfajta szinguláris eset, a potenciálok differenciálhatóságát sértő módon jelentkeznek. Emiatt az ideális képlékenységet magába foglaló, a klasszikus képlékenységi formalizmusát pontosan azonosító tárgyalása speciális matematikai eszközök bevezetését igényli (pl. LEGENDRE-FENCHEL transzformáció). A nem ideális - viszkózus képlékenységi - elmélet alapegyenletei az ideális képlékenységi egyenletek egyfajta regularizációját eredményezik [9].

ZIEGLER - elég nehezen követhető - érvelése és nevezetes ortogonalitási feltétele termodinamikai kiindulóponton alapul [6, 10]:

Általában az entrópia változása reverzibilis és irreverzibilis részre osztható:

$$dS = Td_rS + d_iS, \quad \text{ahol,} \quad d_iS \geq 0. \quad (15)$$

Tegyük fel, hogy az entrópia csak az  $U$  belső energiától és  $a_k$  belső változóktól függ. Ekkor a GIBBS-reláció a következő formában írható:

$$dU = TdS - A_k da_k = Td_rS - A_k da_k + Td_iS. \quad (16)$$

Az utolsó tag - mint irreverzibilis járulékos - folyamatsebességek függvénye és ezt tekinti ZIEGLER a *disszipációs függvénynek*, azaz  $\Phi(U, \dot{U}, a_k, \dot{a}_k) = Td_iS$ . Ezután ZIEGLER feltételezi, hogy

1. az irreverzibilis járulékos csak a belső változóhoz kötődik és ezért  $Td_iS = F_k da_k$ , ahol  $F_k$  általánosított disszipatív erőket jelöl,
2. a disszipatív erők párhuzamosak a disszipációs függvény növekedési irányával a nemegyensúlyi állapotterben, azaz a következő kapcsolatban vannak

$$F_k = \nu \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{a}_k}, \quad (17)$$

ahol  $\nu$  pozitív skalár értékű függvénye a  $\Phi$  változóinak.

Ezek után - még a homogén rendszerekre vonatkozó termodinamikai keretek között - ZIEGLER kiaknázza (15) egyenlőtlenségét, a tulajdonképpeni entrópiatermelést is, amely az eddigiek alapján

$$F_k da_k \geq 0$$

formában írható. Intuitív módon onszagéri erőnek tekinti  $da_k$ -t és meghatározandó áramnak  $F_k$ -t, és egyrészt megállapítja, hogy

- a vezetési mátrix antiszimmetrikus része nem járul hozzá az entrópiaprodukcióhoz, azaz a termodinamika - az ő szóhasználatával - nem mond semmit a "giroszkópikus erőkről".
- nemdisszipatív esetben, azaz ha  $d_i S = 0$ , az  $F_k$  általánosított disszipatív erők merőlegesek a  $da_k$  áramokra. Ez a híres ZIEGLER-féle *ortogonalitási feltétel*, a klasszikus képlékenységtan termodinamikai megalapozásának sokat vitatott sarokköve. Az ortogonalitási feltétel csak a nem disszipatív esetben következménye a fenti gondolatmenetnek.

Az első (1) feltevést ZIEGLER semmivel sem próbálja indokolni, annyira természetesnek érzi. A másodikat, (2)-t, később duális terekre vonatkozó (nem túl meggyőző) gondolatmenettel támogatja meg (lásd [10]) illetve egy plauzibilisnek látszó variációs elvet, a Maximális Entrópiaprodukció Elvét posztulálja helyette (vigyázat, ez nem azonos a PRIGOGINE-féle Minimális Entrópiaprodukció Elvével, ami vegyész és biológus körökben népszerű). Valójában úgy tűnik ZIEGLER felismerte, hogy ezzel a feltevéssel tudja a klasszikus képlékenységtan elméletek fogalomrendszerét a nemegyensúlyi termodinamikával összekapcsolni, mert a disszipációs potenciál ekkor természetes módon a folyási és a képlékenységi függvényhez köthető.

Ziegler javaslatát azután MAUGIN (illetve a francia iskola) többféle irányban kiaknázta a mechanikai alapú elméletek termodinamikai általánosításaival (töredezés, károsodás, anyagi sokaságok, stb.) [11, 8, 12]. Ő mechanikai alapon - HAMILTON- típusú variációs elvvel - próbálja indokolni Ziegler feltevéseit. Fontos felismerése, hogy az ONSAGER-szimmetria miatt a ZIEGLER által még többféle változórendszerben meghatározott disszipációs függvénye mögött felismeri és azonosítja a klasszikus RAYLEIGH-féle disszipációs potenciálokat.

Összefoglalva: a ZIEGLER-féle termodinamikai képlékenységtan elmélet a klasszikus képlékenység feltételeit egyszerűsíti az előző fejezet 2-5 pontjainak alábbi módosításával:

- Disszipációs potenciálként értelmezi a képlékenységi függvényt, és illeszti a nemegyensúlyi termodinamika elméletéhez.
- Lehetővé teszi a képlékeny alakváltozásra vonatkozó fejlődési egyenlet termodinamikai (vagy variációs mechanikai) alapon történő származtatását [13, 14].

A fenti feltevésrendszer világosan megalapozza, illetve termodinamikai elmélet keretei közé illeszti a kapcsolt képlékenységet, és lehetőséget teremt az egyéb termodinamikai kölcsönhatásokkal együttes tárgyalására. Ilyenek például a viszkózus hatásokat is

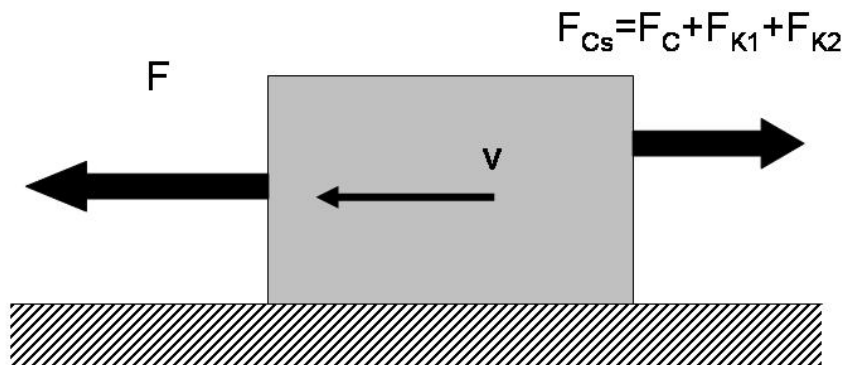
figyelembe vevő viszkoplaszticitás, károsodás, stb. A termodinamikai háttér biztosítja robusztus — azaz a paraméterek, kezdeti és peremfeltételek váltásaira nem érzékeny — és stabil numerikus eljárások létezését. A képlékenységen túlmenően is a hiszterézis jelenségének megfelelő leírását adja.

Egy, az előzőektől lényegesen különböző, de termodinamikailag következetes megközelítést ad ASSZONYI, VÁN és SZARKA [15]. Ők a képlékenységi feltételt az entrópiafüggvény változójának tekintik és ennek segítségével adják meg a rugalmassági állandók képlékenység következtében bekövetkező változását. Alapfeltevésük, hogy a képlékenységi feltétel munka alapú. Ez a megközelítés alkalmas viszkoelasztikus, képlékeny-reológiai növekményes egyenletek közvetlen levezetésére és a deformáció időbeli változásának leírására reológiai és képlékeny hatások esetén. A képlékenységi feltétel közvetlen használata viszont azzal jár, hogy a rugalmassági modulus a képlékenységi határ átlépésekor ugrásszerűen változik, lényegében úgy, ahogy  $C_{ijkl}$  és (10) különbözik. Az időbeli változások differenciálegyenleteken alapuló leírásakor viszont ez a deformáció ugrásszerű változását okozza, ami fizikailag irreális, és ezért további feltételekkel kell kiküszöbölnünk. Az elmélet kiterjeszhetőségét nem-kapcsolt képlékenység leírására nem vizsgáltuk.

A kapcsolt képlékenység azonban nem jó modellje a talajoknak és köveknek (dilatancia), nem ad leírást a szöglet hatásra, és nem magyarázható vele a lágyulás (softening) jelensége [16, 17]. A három probléma közül az első kérdéskör, azaz a dilatancia leírásával kapcsolatos nehézségek köre tűnik a legalapvetőbbnek. A dilatancia azt jelenti, hogy nyírási képlékeny alakváltozás térfogatnövekedést okoz - mindennapos jelenség sűrű szemcsés anyagokban. Amint majd látni fogjuk, a kapcsolttság (asszociativitás) alapvető termodinamikai feltételekhez köthető, így feloldása feltehetőleg szükségessé teszi a klasszikus termodinamikai képlékenység általánosítását. Képlékenység-mechanikai oldalról — ha nem vesszük figyelembe a második főtételel —, akkor könnyű dolgunk van: már említettük, hogy a folyásfüggvény és a képlékeny potenciál megkülönböztetése vezet eredményre. Ha viszont legalább nagyjából meg akarjuk tartani a termodinamikai keretet csak néhány általánosítást ismerünk.

RISTINMAA és OTTOSEN [18] két részre osztják a belső változókhöz konjugált termodinamikai áramokat, és mindkét halmazhoz disszipációs potenciált feltételeznek, illetve gyártanak. A többféle potenciállal valójában megsértik a termodinamikai kereteket. Viszont így levezethetőek szöglet hatások (amikor a folyási függvény szintfelülete törik) és nem-kapcsolt képlékenység is, többek között DUVOUT-LIONS jellegű. A dinamikai folyásfelületre vonatkozó javaslatuk viszont visszaállítja a klasszikus képlékenység lazább - és a második főtételel tisztázatlan viszonyú - önkényes feltevéseit [19], ezzel gyakorlatilag kiküszöböli a termodinamikai megközelítés előnyeit.





1. ÁBRA. Csúszó, súrlódó csillapított mozgású mechanikai-termodinamikai test. Valójában pontszerűnek tekintett test, de a hagyományoknak megfelelően merev testként szemléltettük.

HOULSBY (és talán COLLINS) hiperképlékenységnek nevezett elméletét a belső változókra vonatkozó kinematikai kényszerek teszik nem-kapcsolttá [20]. A továbbiakban kifejtett — tisztán termodinamikai — megfontolásokhoz (és a ZIEGLER-féle elgondolások lényegéhez) ez áll legközelebb.

### 3. A SÚRLÓDÁS TERMODINAMIKÁJA

Tekintsünk egy vízszintes talajon  $F$  külső erővel mozgatott  $m$  tömegű testet, amelyre súrlódási és csillapító erők hatnak (1. ábra). Az elemi fizikából jól ismert módon háromféle közegerőt szoktunk feltételezni a mozgás fékezőjeként.

- Az sebesség nagyságától független Coulomb-féle súrlódási erőt

$$|F_C| = \alpha = \mu N = \text{áll.}, \quad (18)$$

- a sebességgel arányos közegellenállást

$$|F_{K1}| = \beta v, \quad (19)$$

- és a sebesség négyzetével arányos közegellenállást

$$|F_{K2}| = \gamma v^2. \quad (20)$$

Ezek mind a mozgást fékező erők, ezért irányuk a sebességgel ellentétes. Vagyis egy dimenzióban a teljes fékező erő pontosabb formája:

$$F_{Cs} = F_C + F_{K1} + F_{K2} = -\alpha \frac{v}{|v|} - \beta v - \gamma v|v|. \quad (21)$$

A fenti mozgásra vonatkozó differenciálegyenlet pedig a következő lesz:

$$m\ddot{x} = F + F_{Cs} = F - \alpha \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} - \beta \dot{x} - \gamma \dot{x}|\dot{x}|. \quad (22)$$

A csillapító erők azonban nemcsak a mozgást fékezik, hanem egyúttal disszipatívak. Munkájuk melegíti a testet és környezetét. Ez utóbbi tulajdonság termodinamikai keretek között válik érthetővé és egyúttal levezethető mozgást fékező természetük. Tehát vegyük észre, hogy az (1) ábrán egy termodinamikai rendszert látunk, egy környezetével kapcsolatban álló homogén termodinamikai testet.

A termodinamikai tárgyalásban a konstitutív mennyiségekre vonatkozó megszorításokat kaphatjuk meg. Ennek első lépéseként az alaplérlegeket írjuk fel. Az impulzummérleg esetünkben az előbbieken felírt (22) egyenlet, de benne a rendszer és környezet kapcsolatát leíró, csillapító erő konstitutív mennyiség, amit a második főtétele követelményeinek megfelelően szeretnénk előírni:

$$m\ddot{x} = F + F_{Cs}. \quad (23)$$

Tegyük fel továbbá, hogy a tömegpont  $E$  energiáját csak a külső  $F$  erő munkája változtatja, annak hiányában megmaradna. Tehát

$$\dot{E} = F\dot{x}. \quad (24)$$

Látni, fogjuk, hogy ebből a feltevésből — termodinamikai keretek között — következik, hogy csillapító erők munkája csak a tömegpont belső energiáját növeli. Gondolattmenetünkben az egyszerűség kedvéért nem foglalkozunk a környezet energiamérlegével. A tömegpont  $U$  belső energiája definíció szerint a  $E$  energiájának és a kinetikus és potenciális energiájának különbsége, azaz

$$U = E - m\frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Az entrópia a belső energia függvénye, belső energia szerinti deriváltja pedig a hőmérséklet reciproka. Éppen ezért a (24) energiamérleg és a (23) impulzummérleg felhasználásával kapjuk, hogy

$$\dot{S}(U) = \frac{1}{T}\dot{U} = \frac{1}{T}(\dot{E} - m\dot{x}\ddot{x}) = -\frac{\dot{x}}{T}(m\ddot{x} - F) = -\frac{1}{T}F_{Cs}\dot{x}. \quad (25)$$

A második főtétele értelmében pedig az entrópia növekszik,

$$\dot{S} = -\frac{1}{T}F_{Cs}\dot{x} \geq 0, \quad (26)$$

tehát a csillapító erő ellentétes irányú kell legyen a sebességgel. Ez a formula kínálja a termodinamikai erők és áramok azonosítását is. A sebességet a mozgás meghatározza. A csillapító erő viszont a test és a környezet viszonyát megadó függvény, tehát ez lesz a meghatározandó termodinamikai áram. Az egyenlőtlenség értelmében, a csillapító erő, mint konstitutív mennyiség csak a sebesség függvénye lehet, ami pedig jelen esetben független változóként termodinamikai erő. A termodinamikai és mechanikai elnevezések erre a furcsaságára, vagyis hogy a csillapító erő termodinamikai szempontból áramnak tekintendő, a kontinuummechanikai tárgyalásban már felhívtuk a figyelmet [21]. A kontinuumok esetén sebességgradiens bizonyult termodinamikai erőnek, itt pedig a sebesség (illetve a sebesség és a hőmérséklet hányadosa). Felhívjuk a figyelmet, hogy a sebesség itt a súrlódó felületek közötti relatív sebesség és a fenti tárgyalás - megfelelően általánosítva - túllép a termosztatikán és a mozgó testek közönséges termodinamikájához tartozik. A mozgó homogén testek termodinamikája a mechanika és a termodinamika egyesítésének fontos eleme, számos régi és új megoldatlan és megoldatlannak hitt problémával [22, 23].

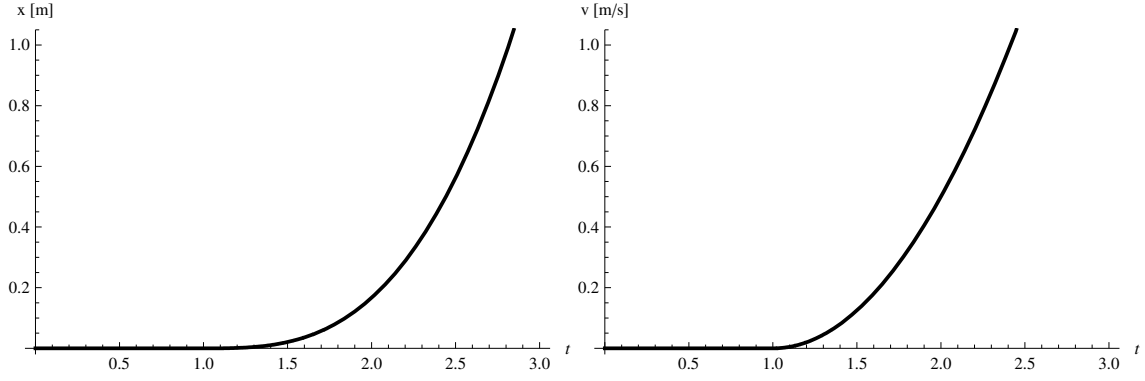
Azonnal láthatjuk, hogy a kontinuumok esetén szokásos szigorúan lineáris erő-áram kapcsolat csak egyik, a sebességgel arányos, fajtáját adja a jól ismert csillapítási erőknek. A COULOMB- súrlódás és a sebesség négyzetével arányos csillapítás szintén megfelel a (26) egyenlőtlenségnek, a következő módon:

$$F_{Cs} = -L(\dot{x})\dot{x} = -\left(\beta + \alpha \frac{1}{|\dot{x}|} + \gamma|\dot{x}|\right)\dot{x} \quad (27)$$

Az erő-áram kapcsolat nemlineáris, a sebességtől, mint termodinamikai erőből függ az  $L$  vezetési együttható. A második főtétele egyenlőtlensége megköveteli, hogy az  $\alpha, \beta, \gamma$  együtthatók ne legyenek negatívak. Az entrópia növekedésének feltételéből következtünk a csillapító erő irányára, utólag igazolva fékező tulajdonságát. A klasszikus irreverzibilis termodinamika a FOURIER-hővezetés, FICK-diffúzió, vagy például a NAVIER-STOKES-egyenlet levezetésénél szigorúan lineáris (állandó), vagy kvázilineáris (alapváltozóktól függő) erő-áram kapcsolatot feltételez. Itt most példát láthatunk ettől általánosabb, nemlineáris vezetési egyenletre, ráadásul egy nagyon egyszerű és jól ismert jelenségkör esetére.

A fenti (27) általános csillapítási anyagtörvény és a belőle következő (22) differenciálegyenlet azonban fizikailag nem teljesen felel meg az elvárásainknak és a mindennapi kísérleti tapasztalatnak, ugyanis nem ad számot a tapadási súrlódásról. Tegyük fel ugyanis, hogy a tömegpontra ható erőt egyenletes sebességgel növeljük, azaz legyen  $F = Vt$ , ahol  $V$  a terhelési sebesség és  $t$  az idő. Az egyszerűség kedvéért legyen továbbá  $\gamma = 0$ . Ekkor látjuk, hogy megoldandó lenne a

$$m\dot{v}(t) = Vt - \alpha \frac{v(t)}{|v(t)|} - \beta v(t)$$



2. ÁBRA. Az elmozdulás és a sebesség időfüggése a (28) differenciálegyenlet szerint,  $m = 1\text{kg}$ ,  $V = 1\text{m/s}$ ,  $\alpha = 1\text{N}$ ,  $\beta = 0\frac{\text{kg}}{\text{s}}$  paraméterértékekkel számolva. A kritikus tapadási súrlódási erő eléréséig a test nem mozdul el és sebessége is nulla.

differenciálegyenlet a  $v(0) = 0$  kezdeti feltétellel. A matematikai feladat azonban így, a további fizikai feltevések nélkül határozatlan, illetve fizikailag rossz eredményt ad. Egyrészt a COULOMB-súrlódási tag  $t = 0$ -beli értékét rögzítenünk kell, másrészt fel kell tételoznünk, hogy a súrlódási erők nem gyorsítják a tömegpontot, azaz például előírni, hogy a kezdeti feltétel legyen  $v(\alpha/V) = 0$ , a sebesség növekedése csak a Coulomb súrlódási erő elérése után kezdődik meg. Vagyis a differenciálegyenlet a következő formában pontosabb fizikai modell:

$$m\dot{v}(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } Vt < \alpha, \\ Vt - \alpha\frac{v(t)}{|v(t)|} - \beta v(t), & \text{ha } Vt \geq \alpha. \end{cases} \quad (28)$$

Vegyük észre, hogy egy kritikus erő jellegű feltételt adtunk meg, a képlékenység klasszikus elméletéhez hasonlóan. A differenciálegyenlet megoldásait a 2-3. ábrákon szemléltettük.

Egy másik, trükkösebb módon viszont a tapadás feltételét eleve tartalmazza termodinamikai vezetési törvény. A második főtétele egyenlőtlenségének megoldását ugyanis nemcsak (27)-hez hasonló, hatványsorszerű formában kereshetjük. Tegyük fel ugyanis, hogy

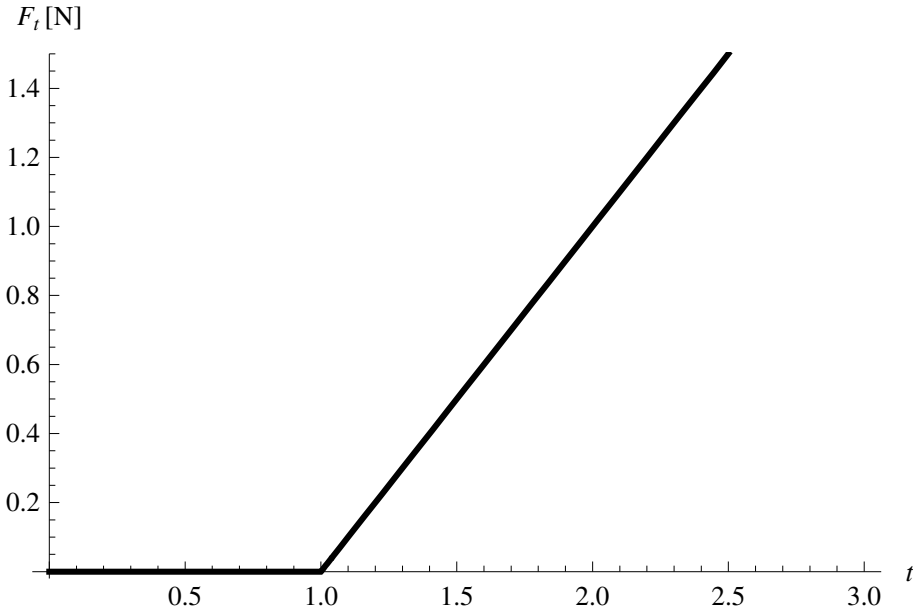
$$F_{Cs} = -\hat{L}(F_{Cs})\dot{x} = -(\hat{B} + \hat{A}|F_{Cs}|)\dot{x}, \quad (29)$$

vagy ezzel lényegében ekvivalensen

$$\dot{x} = -L(\dot{x})F_{Cs} = -(B + A|\dot{x}|)F_{Cs}. \quad (30)$$

Pontosabban, fenntartva a függvénykapcsolatok előre rögzített formáját, azaz hogy  $F_{Cs}(\dot{x})$  határozatlan függvényt keresünk, azt írhatjuk, hogy

$$F_{Cs} = -L(\dot{x})\dot{x} = -\frac{\beta\dot{x}}{1 + \beta|\dot{x}|/\alpha}. \quad (31)$$



3. ÁBRA. A teljes erő, azaz a (28) differenciálegyenlet jobb oldalának időfüggése, a 2. ábra paramétereivel.

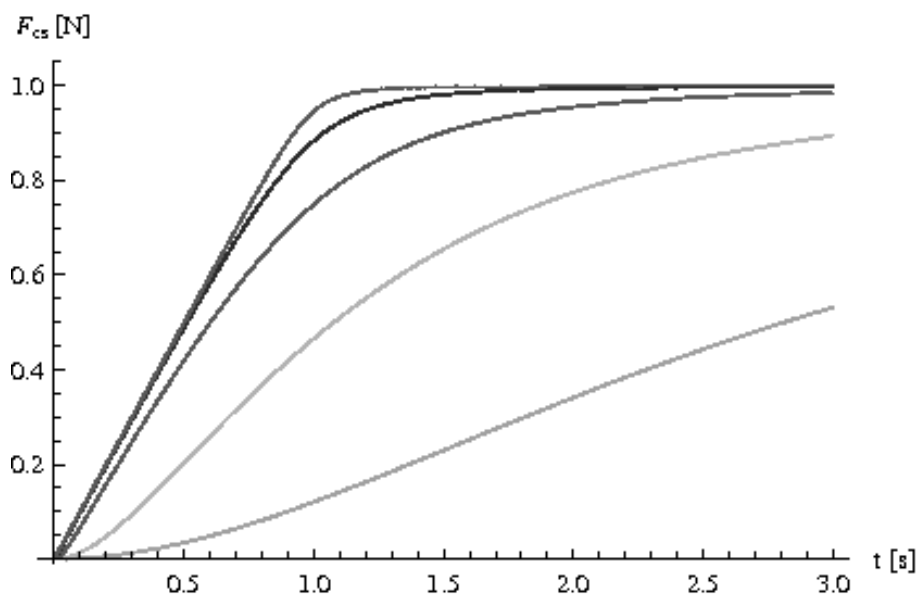
A fenti formulákban  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha = 1/A$  és  $\beta = 1/B$  anyagi paraméterek. A második főtételegyenlőségét anyagi tulajdonságként, tehát a folyamatoktól (azaz jelen esetben  $\dot{x}$ -től) függetlenül megkövetelve, egyik fenti paraméter sem lehet negatív. Ha  $1 \gg \beta|\dot{x}|/\alpha$ , akkor  $F_{cs} \approx -\beta\dot{x}$ . Ha  $1 \ll \beta|\dot{x}|/\alpha$ , akkor  $F_{cs} \approx -\alpha\dot{x}/|\dot{x}|$ . Tehát kis sebességek esetén a sebességgel arányos a súrlódási erő, nagyobb sebességek esetén állandó. Egyenletesen növekvő erő hatásának kitett súrlódással mozgó tömegpont mozgásegyenlete tehát

$$m\dot{v}(t) = Vt - \frac{\beta v(t)}{1 + \frac{\beta}{\alpha}|v(t)|}. \quad (32)$$

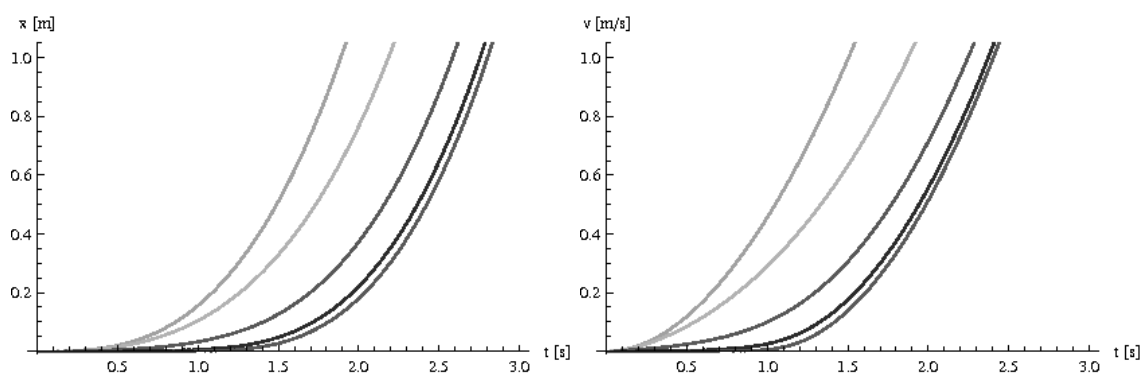
Ez az együtthatók és az időskála megfelelő beállításával pontosan az elvárt tapadási-csúszási súrlódásos viselkedést eredményezi (4-5 ábrák). Az előző, klasszikus súrlódásra vonatkozó (28) differenciálegyenlethez képest (32) láthatóan számot ad a mozgás kezdetéről, csak  $\beta \rightarrow \infty$  esetén kapjuk vissza az előző egyenlet megoldásait, illetve (28) éles feltételét.

Másrészt viszont ami az előnye ennek a modellnek, az egyúttal a hátránya is. Ugyan az éles átmenet helyett egy, a  $\beta$  paraméterrel hangolható, tompított álló-csúszó (merevképlékeny) átmenetet kapunk, de a test már az erőhatás kezdetétől fogva mozog egy kicsit. A fizikai képünk is ennek megfelelően változik: ez a fajta sebességgel arányos csillapítás kis sebességek esetén érvényes.

A súrlódás jelenségének fenti nagyon egyszerű modelljét szemléltetésnek szántuk. Nem vettük figyelembe az erő irányát és a nyomóerő hatását sem. A jelenségkörnek azon-



4. ÁBRA. A csillapítási erő időfüggése.  $m = 1\text{kg}$ ,  $V = 1\text{m/s}$ ,  $\alpha = 1\text{N}$ ,  $\beta = \{0.3, 3, 30, 300, 3000\} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ . A legfelső, legszögletesebb görbéhez tartozik a legnagyobb  $\beta = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$  érték. Nagy  $\beta$  esetén a súrlódási erő a terhelőerővel együtt növekszik, majd állandó értéket vesz fel.



5. ÁBRA. Az elmozdulás és a sebesség időfüggése az 1. ábra paramétereivel számolva. A legfelső, görbéhez tartozik a legkisebb  $\beta = 0.3 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$  érték. Nagy  $\beta$  esetén a test nem mozdul el és sebessége nagyon kicsi amíg a terhelés el nem éri az  $F = \alpha$  határt.

ban ezeken felül is számos további olyan vonatkozása van, amelynek nincs megfelelő termodinamikai leírása [24, 25]. A súrlódási konstitutív törvények termodinamikai megszorításainak vizsgálata önmagában is érdekes, mert elkülöníti a jelenségkör univerzális és anyagfüggő vonatkozásait. Az első lépéseket ebben az irányban VERHÁS írása jelenti [26]. Valódi anyagi paraméterek azonosítása a kontaktmechanikában (a súrlódási, gördülési és ütközési tulajdonságok vizsgálatakor) önmagában is fontos, ráadásul a képlékenységi elméletek mélyebb megértéséhez és továbbfejlesztéséhez vezethet. (30)-(31) vezetési egyenletekhez tartozó erő-áram kép, azaz az egyenletek felállítása és ennek megfelelően az általánosításának iránya is különböző, de a kapott mozgásegyenletek ekvivalensek. (29) nem ekvivalens az utóbbiakkal, de a képlékenység irodalmában mégis elsősorban ez a forma terjedt el. Az utolsó fejezetben látni fogjuk, hogy a tapadási viselkedést tükrözi, nagyon hasonló megoldásokra vezet, mint (30)-(31).

## 4. A REOLÓGIA TERMODINAMIKAI ELMÉLETE - KIS DEFORMÁCIÓK

### 4.1. MÉRLEGEK

A klasszikus képlékenységlelméletek termodinamikai megalapozottságának hiánya különösen a reológiával történő összevetés fényében szembetűnő. A termodinamikai reológia egyenletei és egész anyagelmélete - azaz a konstitutív egyenletek származtatási módja - ugyanis világos módon a második főtételek alapszik.

A reológia gyakorlatban leginkább használt alapmodelljei az empirikus alapon származtatott skalár, lineáris elemek ad hoc kapcsolásából adódnak. Az ilyen 'félempirikus' modellezés teljesítőképessége azonban korlátozott, ugyanis általában nem anyagmodellekről van szó bennük, hanem inkább körülménymodellekről, mert paramétereik függenek a körülményektől (pl. terhelési feltételektől, irányoktól és sebességektől). A valódi anyagi paraméterek és modellek keresése vezetett az objektivitást (vonakoztatási rendszertől való függetlenséget) és a termodinamikai követelményeket érvényesítő elméletek kidolgozásához. Hiába egyszerűek a klasszikus reológia skalár lineáris egyenletei, ha érvényességük korlátozott volta miatt a megfelelő paramétereket mindig újra és újra (esetleg speciális gépekkel) meg kell mérnünk. Van, amikor ez lehetetlen vagy költségesebb, mint egy megfelelően megbízható, kevésbé körülményfüggő anyagmodell használata. Ezért az általános elvi követelményeknek is megfelelő, éppen ezért sokkal szigorúbb keretekben kidolgozott modellek iránti igény nem csak esztétikai, hanem végső soron gyakorlati, gazdaságossági követelmény.

A reológia két alapjelensége a kúszás és a relaxáció. Mechanikai testet ugrásszerűen megterhelve és a terhelést ezután állandóan tartva a deformáció ugrásszerű kezdeti válto-

zás után fokozatosan veszi fel állandósult értékét: ez a kúszás. Mechanikai testet ugrás-szerűen deformálva és a deformációt állandó értéken tartva a feszültség fokozatosan veszi fel állandósult értékét: ez a (feszültség)relaxáció. Mindkét jelenség magyarázata a rugalmasságtanon túlmutat és viszkoelaszticitás, hipoelaszticitás nevek alatt találhatóak meg őket a mechanikai irodalomban. A nehézséget általában a két alapjelenség egy modell keretein belül történő, egységes értelmezése jelenti.

Az elvi, többek között termodinamikai követelményeknek megfelelő első elmélet, a már említett, TRUESDELL és NOLL nevéhez köthető, hiporugalmasság, amely feltételezi, hogy a feszültségtenzor nemcsak a deformáció, hanem a deformáció időderiváltjának is függvénye. Azonban a termodinamikai potenciálok létezése nem dobható el következmények nélkül, a hiporugalmasság elmélete túlságosan laza, ezért könnyen vezet rossz anyagfüggvényekre.

Az első, termodinamikailag igazán megfelelő, nagy deformációkra vonatkozó és objektív időderiváltakat használó, belső változókon alapuló reológiai elméletet VERHÁS dolgozta ki [27], KLUITENBERG [28, 29] úttörő munkáira alapozva. E szerint az elmélet szerint a relaxáció és a kúszás egyenrangú és az ezeket egyszerre tartalmazó alapmodellt, a POYNTING-THOMSON-féle ún. standard modellt egyetlen belső változó segítségével megkaphatjuk termodinamikailag minimálisnak tekinthető további feltételekkel.

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk VERHÁS elméletét, kis deformációk esetére szorítkozva. Az elméletnek többféle nagy deformációs kiterjesztése is létezik, amelyek az objektivitás követelményét is figyelembe veszik. Ezeknek az elvi szempontból teljesnek tekinthető elképzeléseknek azonban a fent említett egyszerű reológiai alapjelenségeken túlmutató, kísérletekkel történő összevetése máig nem teljes; több probléma megoldásra vár. Megjegyezzük, hogy a reológiának jelenleg *nincs* olyan modellje - sem olyan, amely megfelel a fenti két elvi követelménynek (az objektivitásnak és a termodinamikai következetességnek), sem másmilyen -, amely minden fő reológiai kísérlet (egyszerű nyírás, viszkozitás, nyírás relaxáció, nyírás szünet, stb...) során kielégítő egyezést mutatna a mérésekkel.

Minden képlékeny és reológiai modell felállításakor az alapmérlegek felírásából és entrópiaprodukciónak levezetéséből indulunk ki. Esetünkben az entrópiaprodukciónak kiszámításához a tömeg-, lendület- és energiamérlegeket kell figyelembe vennünk.

A tömeget megmaradónak tekintve kapjuk, hogy

$$\dot{\rho} + \rho \partial_i v^i = 0, \quad (33)$$

ahol  $\rho$  a sűrűség,  $v^i$  a sebességmező, a pont pedig a szubsztanciális időderiváltat jelöli. Az előzőekhez hasonlóan indexes írásmódot alkalmazunk. A lendületmérleg formája pedig a következő lesz, ha eltekintünk a külső, térfogati erőktől, amelyek nem játszhatnak



szerepet az anyagegyenletek levezetésénél:

$$\rho \dot{v}^i - \partial_j t^{ij} = 0^i. \quad (34)$$

Itt  $t^{ij}$  a feszültségtenzor. Feltételezzük, hogy a közegben nincs belső impulzusmomentum, tehát a feszültségtenzor szimmetrikus:  $t^{ij} = t^{ji}$ . A teljes energia mérlege

$$\rho \dot{e} + \partial_i q_t^i = 0, \quad (35)$$

ahol  $e$  a teljes energia fajlagos értéke,  $q_t^i$  pedig az áramsűrűsége. Egykomponensű egyszerű mechanikai kontinuumok - elsősorban folyadékok - esetén a belső energia a teljes és a kinetikus energia különbsége. Ezt a definíciót használtuk az előző fejezet súrlódásra vonatkozó megfontolásaiban is. A rugalmasságtanban a mechanikai energiát általában a (HELMOLTZ-féle) szabadenergia segítségével kötik a termodinamikai követelményekhez. Reológiai rendszerekben feltételezik, hogy a mechanikai hatást az anyagban végbemenő strukturális változások késleltetik. Ezt a memória-, illetve tehetetlenségi jelenséget egyetlen szimmetrikus másodrendű tenzor dinamikai változóval veszik figyelembe. Most a belső energiát a teljes energia és a más energiafajták (kinetikus, rugalmas) különbségeként fogjuk értelmezni. Mint látni fogjuk, ez egyszerűsítéseket jelent a tárgyalásmódban és könnyen megmutatható, hogy izoterm esetben ekvivalens a hagyományos, VERHÁS által is alkalmazott megoldással, ahol az entrópiát egészítik ki a dinamikai (vagy belső) változók kvadratikussal formájával [30]. Az ideálisan rugalmas izotrop kontinuum fajlagos rugalmas energiája kis deformációk esetén

$$e_{rug} = \frac{\lambda}{2} (\epsilon_i^i)^2 + \mu \tilde{\epsilon}^{ij} \tilde{\epsilon}_{ij}, \quad (36)$$

ahol  $\lambda$  és  $\mu$  a LAMÉ-állandók,  $\tilde{\epsilon}^{ij} = \epsilon^{ij} - \epsilon_k^k / 3 \delta^{ij}$  pedig a deformáció nulla nyomú része ( $\epsilon_i^i$  a nyoma indexes jelöléssel).

A dinamikai változót  $\xi^{ij}$ -vel jelöljük és hatását figyelembe vesszük a teljes energia meghatározásakor. Feltételezzük, hogy járuléka az eddigi energiafélékhez hasonlóan additív és független, formája pedig a kinetikus energiához hasonlóan - nem véletlenül - kvadratikussal. Ebből következően az  $e_B$  belső energia

$$e_B = e - \frac{v^2}{2} - e_{rug}(\epsilon^{ij}) - e_{din}(\xi^{ij}). \quad (37)$$

Az első két tagot, a teljes és a kinetikus energia különbségeként meghatározott szokásos belső energiát  $e_b$ -vel jelöljük:

$$e_b = e - \frac{v^2}{2}. \quad (38)$$

A belső, dinamikai változókat nem a belső energiát, hanem csak az entrópiát módosító módon szokás figyelembe venni (lásd pl. [30, 31]). A kétféle megközelítés egyenértékű,

illetve a hőmérséklet szerepét illetően az energiát módosító javaslat fizikailag világosabb. Ez a belső változóhoz köthető kiegészítő energia jelzi, hogy a változó segítségével modellezett hatásnak tehetetlensége van. Ha a tehetetlenségi hatások mikroszkopikus, strukturális mechanizmusát is ismernénk, akkor célszerű lenne bevezetni a tehetetlenséget jellemző, belső változóhoz kötődő tömegszerű együtthatót. Ennek hiányában a MORSE-lemma értelmében izotróp anyagra a belső változóval reprezentált anyagi kinetikus energia járuléka általánosan tiszta négyzetes formában írható, mert a skálát nincs okunk bármihez kötni, azaz:

$$e_{din}(\xi^{ij}) = \frac{1}{2} \xi^{ij} \xi_{ij}. \quad (39)$$

A hagyományos  $e_b$  belső energia fluxusára, azaz konduktív áramsűrűségére vonatkozóan pedig a következő (szokásos) összefüggést feltételezzük

$$q^i = q_t^i - t^{ij} v_j. \quad (40)$$

Ekkor az  $e_b$  belső energia mérlege

$$\rho \dot{e}_b + \partial_j q^j = t^{ij} \partial_j v_i. \quad (41)$$

#### 4.2. ENTRÓPIA ÉS MÉRLEGE

Az entrópiamérleg felírásakor az entrópiasűrűség változóinak megállapítása, illetve a konduktív entrópia-áramsűrűség formájának megtalálása az alapvető feladat. Klasszikusan, gázok és folyadékok esetén ezek az extenzív változók sűrűségei. A kontinuummechanikában a belső energia sűrűsége és valamilyen objektív deformációmérték a leggyakoribb választási lehetőség. Kis deformációs közelítésben ezek egyenértékűek. Az előbbieken már kiválasztottuk az entrópia változóit, és mindet a belső energián keresztül vettük figyelembe, azaz  $s(e_b, \epsilon^{ij}, \xi^{ij}) = \hat{s}(e_B)$ . Ennek megfelelően (36)–(39) felhasználásával a GIBBS-reláció a következő:

$$de_B = de_b - (\lambda \epsilon_k^k \delta^{ij} + \mu \tilde{\epsilon}^{ij}) d\epsilon_{ij} - \xi^{ij} d\xi_{ij} = T ds + (t_s)^{ij} d\epsilon^{ij} - \xi^{ij} d\xi_{ij}. \quad (42)$$

Itt  $(t_s)^{ij} = \frac{\partial e_{rug}}{\partial \epsilon_{ij}} = \lambda \epsilon_k^k \delta^{ij} + 2\mu \tilde{\epsilon}^{ij}$  a termodinamikai feszültségtenzor,  $T$  a hőmérséklet. Innét leolvasható (illetve tulajdonképpen az intenzív mennyiségeket és rajtuk keresztül az entrópiát a parciális deriváltjain keresztül definiálva), hogy

$$\frac{\partial \hat{s}}{\partial e_B} = \frac{\partial s}{\partial e_b} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \epsilon^{ij}} = -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{rug}}{\partial \epsilon^{ij}} = -\frac{(t_s)^{ij}}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \xi^{ij}} = -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{din}}{\partial \xi^{ij}} = -\frac{\xi_{ij}}{T}.$$

Ezek a parciális deriváltak a termodinamikai intenzív mennyiségeknek felelnek meg. A belső változónk a szokásos értelemben nem biztos, hogy extenzív (általában ennek a tulajdonságnak nincs nagy jelentősége belső változókra), de a hozzá tartozó entrópiaderivált

nulla volta definiálja a termodinamikai egyensúlyt. Mivel ennek értéke a fenti utolsó formulából láthatóan  $\xi_{ij}$ -vel arányos, ezért a belső változó egyúttal VERHÁS-féle *dinamikai szabadsági fok* is, mert termodinamikai egyensúlyban értéke nulla. Dinamikai szabadsági fokok lehetnek például a kiterjesztett termodinamikában független változóként bevezetett termodinamikai áramok [32, 31], vagy bizonyos értelemben a relatív impulzus is [33].

Az entrópia konduktív áramsűrűsége a klasszikus választás szerint a hőáramsűrűség és a hőmérséklet hányadosa:  $j^i = q^i/T$ . Míg az entrópia változóinak kiválasztása a fizikai modellezés része, az entrópia áramának formája a modern kontinuum-termodinamika módszereivel kiszámolható. Itt most ezt a levezetést nem adjuk meg, mert egy hosszabb matematikai módszer (pl. LIU- vagy a COLEMAN-NOLL-eljárás) alkalmazásával csak a jól ismert szokásos eredményre jutnánk. Általában bizonyítható, hogy lokálisan egyensúlyi, elsőrendűen gyengén nemlokális irreverzibilis termodinamikában — azaz a mi esetünkben is — egykomponensű közegekre az alaplémérlegek és az entrópiamérleg egyenlőtlenségének következményeként az entrópia-áramsűrűség általában a hőáramsűrűség és a hőmérséklet hányadosa [34].

Az entrópiaprodukció ezek után a következő:

$$\begin{aligned} \rho \dot{s} + \partial_j (j_s)^j &= \rho \dot{s}(e_b, \epsilon^{ij}, \xi^{ij}) + \partial_j \frac{q^j}{T} = \\ &= -\frac{1}{T} (\partial_j q^j - t^{ij} \partial_j v_i) - \frac{(t_s)^{ij}}{T} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\xi_{ij}}{T} \dot{\xi}_{ij} + \partial_j \frac{q^j}{T} = \\ &= \frac{1}{T} (t^{ij} - (t_s)^{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\xi_{ij}}{T} \dot{\xi}_{ij} + q^i \partial_i \frac{1}{T} \geq 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Itt felhasználtuk a kis deformációk esetén a sebességgradiensre érvényes összefüggést:

$$\partial_i v_j = \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (44)$$

Ezek után a mechanikai folyamatokra szorítkozva feltételezzük, hogy a hőmérsékleteloszlás homogén a kontinuumban, vagy a hőáramsűrűség nulla (izoterm, illetve adiabatikus folyamatok). Ekkor a fenti formula utolsó tagja nulla és az energiadisszipáció, azaz az entrópiaprodukció szorozva a hőmérséklettel a következő:

$$T \sigma_s = (t^{ij} - (t_s)^{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} - \xi_{ij} \dot{\xi}^{ij} \geq 0. \quad (45)$$

#### 4.3. VEZETÉSI (KONSTITUTÍV) EGYENLETEK

A klasszikus irreverzibilis termodinamikában az entrópiaprodukció segítségével termodinamikai erőket és áramokat azonosítunk, és közöttük lineáris kapcsolatot feltételezünk. Ezzel megoldjuk az egyenlőtlenséget. Ahogy már az előző fejezetben is említettük,

az áramok és erők megkülönböztetése nem önkényes és nincs benne fizikai feltevés, inkább matematikai jellegű. A termodinamikai erők az állapot ismert függvényei, az áramok pedig konstitutív - azaz meghatározandó - függvényeket tartalmaznak. Jelen esetben a feszültség és a belső változó evolúciós egyenlete a határozatlan, tehát

$$\begin{array}{c|c|c} \text{Erő} & \dot{\xi}^{ij} & -\xi^{ij} \\ \hline \text{Áram} & t^{ij} - (t_s)^{ij} & \xi^{ij} \end{array}$$

A lineáris vezetési egyenletek ezek után a következők lesznek:

$$t^{ij} - (t_s)^{ij} = L_{11}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - L_{12}^{ijkl} \xi_{kl}, \quad (46)$$

$$\dot{\xi}^{ij} = L_{21}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - L_{22}^{ijkl} \xi_{kl}. \quad (47)$$

Itt  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{21}$  és  $L_{22}$  negyedrendű csatolási mátrixok, amik izotrop esetben 2-2 skalár együtthatót tartalmaznak a szimmetrikus tenzor deformáció és belső változó gömbi és deviatorikus részének megfelelően. Ekkor a fenti egyenletrendszer is két független részre esik szét:

$$t_i^i - (t_s)_i^i = m_{11} \dot{\epsilon}_i^i - m_{12} \xi_i^i, \quad (48)$$

$$\dot{\xi}_i^i = m_{21} \dot{\epsilon}_i^i - m_{22} \xi_i^i, \quad (49)$$

$$\tilde{t}^{ij} - (\tilde{t}_s)^{ij} = k_{11} \dot{\tilde{\epsilon}}^{ij} - k_{12} \tilde{\xi}^{ij}, \quad (50)$$

$$\dot{\tilde{\xi}}^{ij} = k_{21} \dot{\tilde{\epsilon}}^{ij} - k_{22} \tilde{\xi}^{ij}. \quad (51)$$

A belső változók általában kiküszöbölhetők a fenti (46)–(47) illetve a (48)–(49) egyenletrendszerekből. Külön-külön a deviatorikus és a térfogati részekre egy-egy ún. tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modellt eredményeznek [30, 21].

Ennek megfelelően az entrópiaprodukciónak is kvadratikus lesz a termodinamikai erőkben vagy áramokban, és a skalár és másodrendű szimmetrikus nyom nélküli tenzorok szétcsatolódnak:

$$\begin{aligned} T\sigma_s = m_{11}(\dot{\epsilon}_i^i)^2 - (m_{12} + m_{21})\dot{\epsilon}_i^i \xi_i^i + m_{22}(\xi_i^i)^2 + \\ + k_{11}\dot{\tilde{\epsilon}}^{ij}\dot{\tilde{\epsilon}}_{ij} - (k_{12} + k_{21})\dot{\tilde{\epsilon}}^{ij}\tilde{\xi}_{ij} + k_{22}\dot{\tilde{\xi}}^{ij}\tilde{\xi}_{ij}. \end{aligned} \quad (52)$$

A továbbiakban egy térdimenziós tárgyalásra térünk át.

#### 4.4. KÖZÖNSÉGES REOLÓGIA - AVAGY REOLÓGIA HOMOGEN TERMODINAMIKAI TESTEKRE

Egy térbeli dimenziós eset többféleképpen is adódik a fenti egyenletekből. Egytengelyű terhelés, vagy csak a térfogatváltozás tárgyalása is egyetlen skalár egyenletre vezet.

Ebben az esetben az eredő egyenlet együtthatói a fenti anyagi paraméterek kombinációi lesznek. Ha az impulzusmérleget nem vesszük figyelembe, akkor a termodinamikai egyenletek csak az időbeli változásokra szorítkozva közönséges differenciálegyenletek, homogén kontinuumra vonatkoznak, ezért ezek az esetek a közönséges, avagy a homogén testekre vonatkozó termodinamikának — a klasszikus termosztatika nemegyensúlyi kiterjesztésének — részét képezik [35].

Összefoglalva a fenti egyenleteket azt kapjuk, hogy az energiadiSSIPáció

$$T\sigma_s = (t - \partial_\epsilon e_r) \dot{\epsilon} - \partial_\xi e_r \dot{\xi} \geq 0, \quad (53)$$

ahol eddigi jelöléseinken rövidítve  $e_e = e_{rug} + e_{din}$  a rugalmas és a belső változóhoz köthető energia összege:

$$e_e = G \frac{\epsilon^2}{2} + \bar{G} \frac{\xi^2}{2}. \quad (54)$$

Itt  $G$  a megfelelő rugalmassági állandó, pl. a YOUNG-modulus, ha egytengelyű terhelést tekintünk.  $\bar{G}$  a belső változóra vonatkozó analóg anyagi paraméter. A kontinuumegyenletekben nem vezettük be, mert csak reológiai jelenségeknél nincs jelentősége. A képlékenység analóg tárgyalásakor azonban lényeges lesz, mert ekkor a belső változónak konkrét fizikai jelentése van: képlékeny deformációként azonosítjuk. A termodinamikai erők és áramok (53) alapján

Erő	$\dot{\epsilon}$	$-\bar{G}\xi$
Áram	$t^v = t - G\epsilon$	$\dot{\xi}$

A lineáris vezetési egyenletek ezek után a következők lesznek:

$$t^v = l_1 \dot{\epsilon} - l_{12} \bar{G} \dot{\xi}, \quad (55)$$

$$\dot{\xi} = l_{21} \dot{\epsilon} - l_2 \bar{G} \dot{\xi}. \quad (56)$$

A belső változót kiküszöbölve a fenti (55)-(56) egyenletrendszerből:

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = 2\eta \tau_d \ddot{\epsilon} + 2\eta \dot{\epsilon} + 2G\epsilon, \quad (57)$$

ahol  $\tau = (\bar{G}l_2)^{-1}$ ,  $2\eta\tau_d = l_1(\bar{G}l_2)^{-1}$ ,  $2\eta = (l_1l_2 - l_{12}l_{21})l_2^{-1}$ . Ez az ún. tehetetlenségi POYNTING-THOMSON-modell, a minimális modell, amely egyszerre képes számot adni a relaxációról és a kúszásról is, illetve figyelembe veszi az anyagi tehetetlenséget. Figyelemre méltó, hogy egyetlen dinamikai változós, minimális termodinamikai elmélet ezt adja alapmodellként.

Vegyük észre, hogy a fenti modellnek a keresztteffektusok jelenléte, azaz  $l_{12}$  és  $l_{21}$  nem nulla volta lényeges elemét képezi két kiemelendő szempontból is. Egyrészt ha nincs keresztteffektus, akkor (55)-(56) két független egyenlet, a belső változónak nincs hatása a mechanikai jelenségekre, és nem küszöbölhető ki. Viszont (57)-ben, a kiküszöbölés

után, a kereszeffektusok együtthatóit már nullának tekintve is érvényes egyenletünk van. Másrészt,  $l_{12}$  és  $l_{21}$  viszonyáról semmit sem feltételeztünk, szándékosan. A szimmetrikus vagy antiszimmetrikus vezetési mátrixok kérdése egyrészt a teljes termodinamikai képlékenységtan elméletnek is egy kulcskérdése (sokak szerint ez dönti el, hogy a képlékenységi modell kapcsolt-e, vagy nem [7]), illetve az (55)-(56) vezetési egyenletekben  $\bar{G}$  értékének megváltoztatása mindig elronthat bármilyen szimmetriára vonatkozó felvetést. Ez az anyagi paraméter ráadásul nem határozható meg csupán mechanikai mérésekkel, mert a belső változóra csak következményeiben, (57) paramétereinek meghatározásából szerezhetnénk információt. Ha pedig  $\bar{G}$  értékét egységnek választjuk és csak szimmetrikus, vagy antiszimmetrikus vezetési együtthatókat feltételezünk, akkor szembesülünk azzal, hogy modellünk nem jó a tapasztalatok egy részére ([27] p98). Másrészt viszont csak a vezetési mátrix szimmetrikus része jelent disszipációt, és annak antiszimmetrikus - "gíroszkópikus" - része nem ad járulékot az entrópiatermeléshez. Azaz, általános vezetési mátrixok használata lehetőséget teremt a termodinamikai leírás érvényességi körének jelentős kiterjesztésére is. Erre vonatkozóan fontos példát jelent, hogy a MAUGIN-féle dinamikai szabadsági fokok és a belső változók elmélete csak az általános esetben egyesíthető [33]. Megjegyezzük, hogy az ONSAGER által adott bizonyítás a reciprocitási relációkra csak tiszta mikroszkopikus háttér esetén érvényes, ezért fenti megállapításunk nincs elmentmondásban vele.

A vezetési együtthatók mátrixának szimmetriája az úgynevezett disszipációs potenciálok létezésének is szükséges és elégséges feltétele. A disszipációs potenciál a termodinamikai erőknél (vagy áramoknak) olyan függvénye, amelynek parciális deriváltjaként kapható meg a fenti (55)–(56) vezetési egyenletek jobb oldala. Jelen esetben, ha  $l_{12} = l_{21}$ , akkor

$$\Phi(\dot{\epsilon}, -\bar{G}\xi) = l_1 \frac{\dot{\epsilon}^2}{2} - l_{12} \dot{\epsilon} \bar{G}\xi + l_2 \frac{(\bar{G}\xi^2)}{2}, \quad (58)$$

hiszen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\epsilon}} &= l_1 \dot{\epsilon} - l_{12} \bar{G}\xi, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial (-\bar{G}\xi)} &= l_{12} \dot{\epsilon} - l_2 \bar{G}\xi. \end{aligned}$$

A disszipációs potenciálok a kapcsolt képlékenység termodinamikai elméletében kulcsfontosságúak, a folyásfüggvény, illetve a képlékeny potenciál szerepét játsszák.

## 5. A KÉPLÉKENYSÉG TERMODINAMIKAI ELMÉLETE - KIS DEFORMÁCIÓK

A termodinamikai képlékenység is egy belső változós elmélet, ahol a belső változót azonnal fizikai, kinematikai jelentéssel felruházva, képlékeny deformációként vezetik be.

Egy mechanikai leírásban nincs is sok más választásunk, mechanikai fogalmakkal kell megragadnunk a jelenségeket. A képlékenység oka valamilyen belső szerkezeti változás az anyagban (pl. diszlokációk mozgása, de a szemcsék átrendeződése is ide tartozhat), amely megváltoztatja a mechanikai erőket, az anyag belső feszültségviszonyait. Azaz, a jelentkező deformáció csak következmény, nem világos, hogy milyen feltételekkel jelentheti alapját a modellezésnek. Ráadásul a fizikai kép, a változó kinematikai jelentése is lényeges, ennek felületes kezelése következtelenné teszi a képlékenységméleteket, ahogy ezt a nagy alakváltozások esetére Bertram megmutatta [36]. Egy termodinamikai leírásban - általánosabb alapokon, a releváns fizikai mennyiséget belső változóként bevezetve - vizsgálhatóbb a képlékenységre vezető feltételrendszer.

Ez a belső változó azonban reológiai társától eltérően nem tekinthető egyúttal VERHÁS-féle dinamikai szabadsági foknak (a VERHÁS-féle dinamikai szabadsági fok olyan speciális belső változó, amely termodinamikai egyensúlyban nulla, azaz a hozzá tartozó intenzív mennyiség arányos magával a változóval). Ugyanis a szóban forgó szerkezeti változások maradandóak lehetnek, a külső hatás megszűnésekor sem enyésznek el. Éppen ezért a képlékenység tárgyalásakor már sztatikai szinten is az előző fejezet reológiai modelljétől eltérő feltevéseket teszünk a belső változó és a deformáció viszonyára, elképzelve, hogy a belső változó változtatja, adott feltételekkel csökkenti a feszültséget, illetve végső soron a tárolt rugalmas energiát. Ebből következően az  $e_B$  belső energia is különbözik a reológiai tárgyalásban bevezetett (37) formától:

$$e_B = e - \frac{v^2}{2} - e_p(\epsilon^{ij}, \xi^{ij}). \quad (59)$$

A sztatikus mechanikai feszültséget az előző rugalmas-reológiai esethez hasonlóan, az  $e_p$  energia deformáció szerinti deriváltjaként határozzuk meg:

$$(t_s)^{ij} = \frac{\partial e_p}{\partial \epsilon_{ij}}. \quad (60)$$

Feltételezzük, hogy a belső változó megváltozása a deformáció változásához képest ellentétesen hat a feszültségre. A deformáció hatását a feszültségre a rugalmassági modulusokkal jellemezzük, azaz nemlineáris esetben a feszültségnek a deformáció szerinti deriváltjával. A feszültségnek a belső változó szerinti deriváltja hasonló negyedrendű tenzor lesz, ezt a képlékeny deformációhoz tartozó rugalmassági modulusnak tekintjük. A fenti követelmény alapján a kétfajta rugalmassági tenzor arányos kell legyen, még hozzá negatív együtthatóval, azaz

$$\frac{\partial t^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} + A_{mn}^{kl} \frac{\partial t^{ij}}{\partial \xi_{mn}} = 0, \quad (61)$$

ahol  $A_{mn}^{kl}$  szimmetrikus és pozitív definit abban az értelemben, hogy  $A_{mn}^{kl} = A_{kl}^{mn}$ , továbbá  $z_{ij} A_{kl}^{ij} z^{kl} \geq 0$  minden  $z_{ij} \neq 0$ -re. Ezenkívül  $A_{mn}^{kl} = A_{nm}^{kl}$  és  $A_{mn}^{kl} = A_{mn}^{lk}$  a deformáció és

a belső változó szimmetrikussága miatt. Ha  $A_{mn}^{kl}$  állandó, akkor a (61) feltétel úgy is felfogható, hogy a deformációval arányos a belső változó, azaz

$$\epsilon^{kl} = A_{mn}^{kl} \xi^{mn},$$

hiszen (61) megoldása alapján  $t^{ij}(\epsilon^{kl} - A_{mn}^{kl} \xi^{mn})$ . Ezért, a sztatikus feszültség előbbi (60) definíciója szerint az  $e_{pla}$  rugalmas-képlékeny energia

$$e_{pla}(\epsilon^{ij}, \xi^{ij}) = e_{rug}(\epsilon^{ij} - A_{mn}^{ij} \xi^{mn}) + e_{din}(\xi^{ij}).$$

Vagyis a reológiai esethez teljesen hasonló formát kaptunk azzal a különbséggel, hogy a deformálódást a belső változó növekedése csökkentheti. Másként fogalmazva, a rugalmas energia csak a deformáció rugalmas részétől függ, amely a valódi és a képlékeny deformáció különbségeként áll elő. Bevezethetünk tehát egy új változót:

$$(\epsilon_p)^{ij} = A_{mn}^{ij} \xi^{mn}.$$

Ez a változó pedig már képlékeny deformációként értelmezhető, visszkapjuk (1)-et. Segítségével a fenti rugalmas-képlékeny energia formája

$$e_{pla}(\epsilon^{ij}, (\epsilon_p)^{ij}) = e_{rug}(\epsilon^{ij} - (\epsilon_p)^{ij}) + e_{din}((\epsilon_p)^{ij}). \quad (62)$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy mind a rugalmas, mind a dinamikai energia kvadrati- kus és izotróp függvénye változóinak, azaz

$$e_{rug}(\epsilon^{ij} - (\epsilon_p)^{ij}) = \frac{\lambda}{2} (\epsilon_i^i - (\epsilon_p)_i^i)^2 + \mu (\tilde{\epsilon}^{ij} - (\tilde{\epsilon}_p)^{ij}) (\tilde{\epsilon}_{ij} - (\tilde{\epsilon}_p)_{ij}), \quad (63)$$

$$e_{din}((\epsilon_p)^{ij}) = \frac{\bar{\lambda}}{2} ((\epsilon_p)_i^i)^2 + \bar{\mu} (\tilde{\epsilon}_p)^{ij} (\tilde{\epsilon}_p)_{ij}. \quad (64)$$

Itt hullámmal az adott szimmetrikus másodrendű tenzor nulla nyomú részét jelöltük az eddigiekhez hasonlóan,  $\lambda$  és  $\mu$  a rugalmas LAMÉ-állandók,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$  pedig a képlékeny (keményedő) tartományban érvényes analóg anyagi paraméterek.

A termodinamikai leírás ezek után is teljesen analóg a reológiai esettel. Az energia járulékaiknak azonosítása után az entrópia csak a belső energián keresztül függ az összde- formációtól és a képlékeny deformációtól:  $s(e_b, \epsilon^{ij}, (\epsilon_p)^{ij}) = \hat{s}(e_B)$ . Ennek megfelelően a GIBBS-reláció a következő:

$$de_B = Td\hat{s} + (t_s)_{ij}d\epsilon^{ij} + (t_p)_{ij}d(\epsilon_p)^{ij}, \quad (65)$$

ahol  $(t_p)^{ij} = \frac{\partial e_{pla}}{\partial (\epsilon_p)_{ij}}$  a képlékeny feszültség. Az eddigieket összefoglalva az intenzív mennyiségeket a fenti GIBBS-reláció, illetve (59) és (62) alapján a következőképpen ad-



hatjuk meg:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{s}}{\partial e_B} &= \frac{\partial s}{\partial e_b} = \frac{1}{T}, \\ \frac{\partial s}{\partial \epsilon^{ij}} &= -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon^{ij}} = -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{rug}}{\partial \epsilon^{ij}} = -\frac{(t_s)^{ij}}{T}, \\ \frac{\partial s}{\partial (\epsilon_p)^{ij}} &= -\frac{1}{T} \frac{\partial e_{pla}}{\partial (\epsilon_p)^{ij}} = -\frac{(t_p)_{ij}}{T}.\end{aligned}$$

Ha a deformáció nem nulla, akkor belső változónk értéke termodinamikai egyensúlyban nem feltétlen nulla. Ezért a belső változó nem lesz VERHÁS-féle dinamikai szabadsági fok, ellentétben a reológiai esettel. Az előző fejezet számításait megismételve végülis az entrópiaprodukció következő lesz:

$$T\sigma_s = (t^{ij} - (t_s)^{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} - (t_p)^{ij} (\dot{\epsilon}_p)_{ij} \geq 0. \quad (66)$$

Ezért aztán, szem előtt tartva, hogy mind a sztatikus, mind a képlékeny feszültség ismert függvénye az alapváltozóknak, a megfelelő termodinamikai erők és áramok a következők lesznek:

Erő	$\dot{\epsilon}^{ij}$	$-(t_p)^{ij}$
Áram	$t^{ij} - (t_s)^{ij}$	$(\dot{\epsilon}_p)_{ij}$

A lineáris vezetési egyenletek ezek után

$$t^{ij} - (t_s)^{ij} = L_{11}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - L_{12}^{ijkl} (t_p)_{kl}, \quad (67)$$

$$(\dot{\epsilon}_p)^{ij} = L_{21}^{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - L_{22}^{ijkl} (t_p)_{kl}. \quad (68)$$

A fenti egyenletrendszer izotrop esetben érvényes változata is nagyon hasonló, mint az előző fejezetben:

$$t^i - (t_s)^i = m_{11} \dot{\epsilon}^i - m_{12} (t_p)^i, \quad (69)$$

$$(\dot{\epsilon}_p)^i = m_{21} \dot{\epsilon}^i - m_{22} (t_p)^i, \quad (70)$$

$$\tilde{t}^{ij} - (\tilde{t}_s)^{ij} = k_{11} \dot{\epsilon}^{ij} - k_{12} (\tilde{t}_p)^{ij}, \quad (71)$$

$$(\dot{\tilde{\epsilon}}_p)^{ij} = k_{21} \dot{\epsilon}^{ij} - k_{22} (\tilde{t}_p)^{ij}. \quad (72)$$

A belső változók kiküszöbölése most is lehetséges, ha feltételezzük, hogy a vezetési együtthatók állandóak.

Ez az egyenletrendszer azonban még nem képlékenységi elmélet, a képlékeny viselkedés egy fontos eleme, maga a képlékenységi feltétel és határ sehol sem jelenik meg benne. A megoldásai is mutatják, hogy eddigi feltételeink sem tartalmazzák rejtetten. A

képlékeny deformációnak ugyanis megvan az a tulajdonsága, amit a bevezetésben említett összes elmélet alapul vesz, hogy csak bizonyos feszültség-, energia-, vagy egyéb feltétel teljesülése esetén kezd változni. A viselkedés a tapadási súrlódáshoz hasonló, a termodinamikai képlékenység elméletének mechanizmusát alkalmaztuk a második fejezetben. Ha a képlékenység csak deviatorikus feszültség hatására lép fel, mint a fémekben, akkor az ott leírt gondolatmenet alapján reológiai motivációjú egyenletrendszerünk módosítása kézenfekvő. Legyen (72)-ben a  $k_{22}$  együttható nemlineáris és (31) szerint függjön a termodinamikai erőttől, jelen esetben  $(t_p)^{ij}$ -től. Természetesen a kontinuummodell bonyolultabb egyenletei több kérdést nyitva hagynak, de az egyik legegyszerűbb olyan változtatás, amelytől képlékeny viselkedést várhatunk, a következő:

$$k_{22} = \frac{k_2}{1 + \frac{k_2}{\sigma_c} |\tilde{t}_p|}. \quad (73)$$

Itt  $|\tilde{t}_p| = \sqrt{(\tilde{t}_p)^{ij}(\tilde{t}_p)_{ij}}$  a képlékeny feszültség deviatorikus részének abszolút értéke. Ez a képlékenységi modellünk kulcsfontosságú utolsó feltevése.

A kapott vezetési egyenletekkel az entrópiaprodukció

$$T\sigma_s = m_{11}(\dot{\epsilon}_i^i)^2 - (m_{12} + m_{21})\dot{\epsilon}_i^i(t_p)_i^i + m_{22}(t_p)_i^i{}^2 + k_{11}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}^{ji} - (k_{12} + k_{21})\dot{\epsilon}_{ij}(\tilde{t}_p)^{ij} + \frac{k_2}{1 + \frac{k_2}{\sigma_c} |\tilde{t}_p|} |\tilde{t}_p|^2 \geq 0. \quad (74)$$

Az utolsó tag figyelemre méltó. Ugyanis, ha  $k_2|\tilde{t}_p|/\sigma_c \gg 1$  akkor a  $\sigma_c|\tilde{t}_p|$  formára egyszerűsödik, ekkor a többivel ellentétben nem kvadratikus. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy ez felel meg az ideális képlékenységnek. A termodinamikai áram abszolút értékét tartalmazó entrópiaprodukció — a kvadratikus forma helyett — a termodinamikai képlékenységelmélet védjegyszerű jellemzője. Ha a fenti vezetési mátrix szimmetrikus, akkor az entrópiaprodukcióból könnyen megadhatjuk a vonatkozó disszipációs potenciált, amit az első fejezetben mondtak alapján a képlékeny potenciállal azonosíthatunk:

$$\Phi(\dot{\epsilon}_i^i, \dot{\epsilon}^{ij}, (t_p)_i^i, (\tilde{t}_p)^{ij}) = \frac{m_{11}}{2}(\dot{\epsilon}_i^i)^2 - m_{12}\dot{\epsilon}_i^i(t_p)_i^i + \frac{m_{22}}{2}(t_p)_i^i{}^2 + \frac{k_{11}}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}^{ji} - k_{12}\dot{\epsilon}_{ij}(\tilde{t}_p)^{ij} + \sigma_c|\tilde{t}_p| - \frac{\sigma_c^2}{k_2} \ln\left(1 + \frac{k_2}{\sigma_c} |\tilde{t}_p|\right) \quad (75)$$

A disszipációs potenciál egyes változói szerinti deriváltak a (69)–(72) egyenletek jobb oldalai adják.

A továbbiakban néhány nagyon egyszerű esetben szemléltetni fogjuk, hogy valóban képlékenységi elméletet adtunk meg, még hozzá egy dinamikus, kinematikai keményedő és disszipatív képlékenységi elméletet, a viszkoelasztoplaszticitás talán legegyszerűbb modelljét.

## 5.1. KÖZÖNSÉGES KÉPLÉKENYSÉG - KÉPLÉKENYSÉG HOMOGEN TESTEKRE

Hasonlóan a reológiai esethez, a homogén képlékeny test egyenletei is többféle terhelés hatására jöhetnek létre.

A rugalmas-képlékeny energia kvadratikus formája, azaz (62) az egydimenziós homogén esetben a következő lesz:

$$e_{pla}(\epsilon, \epsilon_p) = G \frac{(\epsilon - \epsilon_p)^2}{2} + \bar{G} \frac{\epsilon_p^2}{2}. \quad (76)$$

Ennek megfelelően a sztatikus feszültség és képlékeny feszültség

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} &= G(\epsilon - \epsilon_p), \\ \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p} &= G(\epsilon_p - \epsilon) + \bar{G}\epsilon_p = -G\epsilon + (G + \bar{G})\epsilon_p. \end{aligned}$$

A rugalmas-képlékeny energiafüggvény konvex, ha  $G$  és  $\bar{G}$  pozitív. Emlékeztetünk, hogy ez a termosztatikai kép interpretálja belső változónkat képlékeny deformációként, a két állandót pedig a rugalmas és a keményedési modulusként (tehát a  $\bar{G} = 0$  esetben lesz a képlékenységi ideális).

Az entrópiaprodukció (66) formulája változatlan marad:

$$T\sigma_s = \left( t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} \right) \dot{\epsilon} - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p} \dot{\epsilon}_p \geq 0. \quad (77)$$

A termodinamikai erők és áramok pedig a termosztatikai és a képlékeny feszültségekre bevezetett  $t_s = \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon}$  és  $t_p = \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}$  jelölésekkel

Erő		$\dot{\epsilon}$		$-t_p$
Áram		$t - t_s$		$\dot{\epsilon}_p$

A vezetési egyenletek ezek után a következők

$$(t - t_s) = l_1 \dot{\epsilon} - l_{12} t_p, \quad (78)$$

$$\dot{\epsilon}_p = l_{21} \dot{\epsilon} - l_2 t_p. \quad (79)$$

Ezeket most átranszformáljuk az úgynevezett vegyes erő-áram reprezentációba [37]. Az átrendezés a szigorúan lineáris esetben (konstans és invertálható vezetési mátrix) ekvivalens az előző fejezet reprezentációjával [38, 39]:

$$\dot{\epsilon} = l_1^{-1}(t - t_s) - l_1^{-1} l_{12} t_p = \hat{l}_1(t - t_s) + \hat{l}_{12} t_p, \quad (80)$$

$$\dot{\epsilon}_p = l_1^{-1} l_{21}(t - t_s) + (-l_2 + l_1^{-1} l_{12} l_{21}) t_p = \hat{l}_{21}(t - t_s) + \hat{l}_2 t_p. \quad (81)$$

A teljes nemlineáris transzformáció helyett viszont a nemlinearitást most más, a képlékenységi irodalomban hagyományos módon, (29)-el analóg formában fogjuk a számításokban használni. Tegyük fel tehát, hogy az  $\hat{l}_2$  együttható speciális. Egyrészt tartalmaz egy konstans, reológiai tagot, amely (57) szerint a relaxációs és disszipatív hatásokért lesz felelős. Másrészt, ha ez a konstans tag nulla, akkor a képlékeny deformációhoz tartozó termodinamikai intenzív paraméter  $t_p = \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}$  - jelen esetben egyúttal termodinamikai erő - csak a képlékeny deformáció *előjelét* képes meghatározni, nagyságát nem. Azaz feltételezzük, hogy

$$\hat{l}_2 = |\dot{\epsilon}_p|/\sigma_c + l, \quad (82)$$

ahol  $l$  és  $\sigma_c$  pozitív állandók. Látni fogjuk, hogy  $\sigma_c$  a folyási határfeszültség szerepét játssza. Az  $\hat{l}_1, \hat{l}_{12}, \hat{l}_{21}, l$  vezetési együtthatókra a nemnegatív entrópiaprodukcióból következő szokásos termodinamikai egyenlőtlenségek érvényesek. Látni fogjuk, hogy ez a fajta - termodinamikailag következtelen, de a képlékenységtanban szokásos - nemlinearitás ugyanolyan hatást eredményez, mint amit a tapadási súrlódás kapcsán már tapasztaltunk: a képlékeny deformáció csak egy feszültségküszöb átlépése után kezd növekedni.

Az entrópiaprodukció, illetve az energia disszipáció megfelelő tagja most sem kvadratikus, hanem  $|\dot{\epsilon}_p|$ -vel arányos, ha  $l = 0$ . Ez a vegyes reprezentáció miatt nem egészen nyilvánvaló, mert ha (77)-be egyszerűen visszahelyettesítjük a fenti vezetési egyenleteket, kvadratikus formát kapunk. Teljes áramreprezentációt választva, azaz a termodinamikai erőkkel kifejezve a termodinamikai áramokkal és behelyettesítve az entrópiaprodukcióba nem keveredik az  $\hat{l}_2$  vezetési együttható  $\dot{\epsilon}_p$  függése a hozzá tartozó termodinamikai erővel. Ez a következmény - vagyis, hogy a disszipáció a képlékeny deformáció időderiváltjának elsőrendű homogén függvénye - a termodinamikai képlékenység elméletének kiindulópontja szokott lenni.

A vezetési együtthatók tulajdonságait kidomborító tárgyalásunk arra mutat rá, hogy itt a második főtételek egyenlőtlenségének egy olyan megoldásáról van szó, amely az irreverzibilitás egy, a megszokottól eltérő, új módját reprezentálja. A lineáris vezetési együtthatók a súrlódásos, diffúziós, relaxációs jelenségekben megnyilvánuló disszipációt jellemzik, a tapadási súrlódásos jellegűek pedig hiszterézises jelenségekben jelentkező irreverzibilitás mechanizmusát mutatják meg.

A képlékenység elméletének alapfeltevése, hogy a képlékeny deformáció csak egy bizonyos feszültség felett lép fel. A termodinamikai elmélet szépsége, hogy ezt a viselkedést a klasszikus képlékenységnél mélyebb szinten modellezi, mivel nem közvetlenül a tapasztalt következményeket, hanem az okokat próbálja matematikailag megragadni.

## 5.2. MEGOLDÁSOK

A megoldandó differenciálegyenlet-rendszer tehát a fentiek alapján az időderiváltak kiküszöbölésével adódik:

Ha  $\dot{\epsilon}_p > 0$ , akkor

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= \hat{l}_1 \left( t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} \right) + \hat{l}_{12} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p} = \hat{l}_1 (t - G(\epsilon - \epsilon_p)) + \hat{l}_{12} (-G\epsilon + (G + \bar{G})\epsilon_p), \quad (83) \\ \dot{\epsilon}_p &= \frac{\hat{l}_{12} \left( t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} \right) + l \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}}{1 + \sigma_c^{-1} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}} = -\sigma_c l + \frac{\hat{l}_{12} (t - G(\epsilon - \epsilon_p)) + \sigma_c l}{1 + \sigma_c^{-1} (-G\epsilon + (G + \bar{G})\epsilon_p)}. \quad (84)\end{aligned}$$

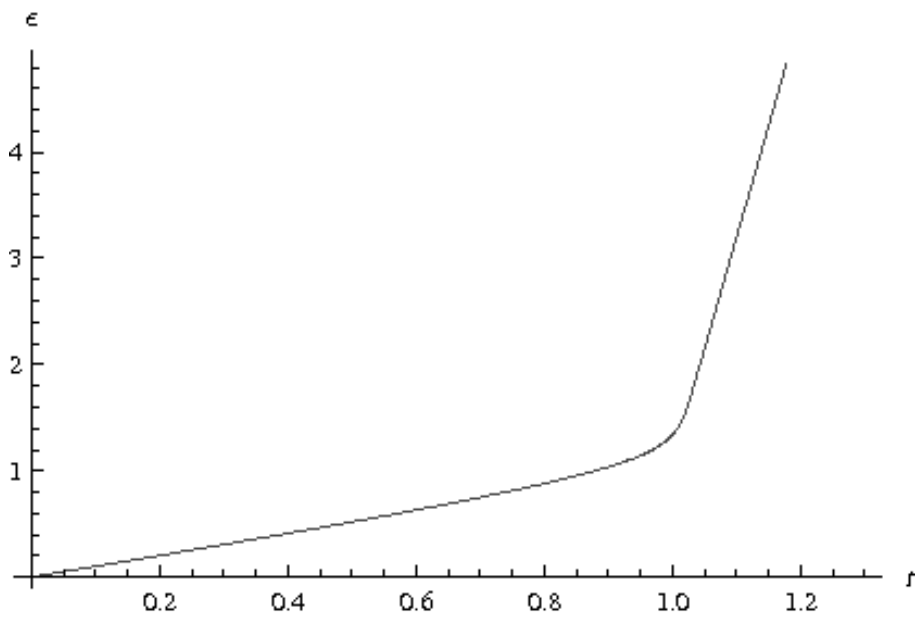
Ha  $\dot{\epsilon}_p \leq 0$ , akkor

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= \hat{l}_1 \left( t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} \right) + \hat{l}_{12} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p} = \hat{l}_1 (t - G(\epsilon - \epsilon_p)) + \hat{l}_{12} (G\epsilon - (G + \bar{G})\epsilon_p), \quad (85) \\ \dot{\epsilon}_p &= \frac{\hat{l}_{12} \left( t - \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon} \right) + l \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}}{1 - \sigma_c^{-1} \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon_p}} = \sigma_k l + \frac{\hat{l}_{12} (t - G(\epsilon - \epsilon_p)) - \sigma_c l}{1 - \sigma_c^{-1} (-G\epsilon + (G + \bar{G})\epsilon_p)}. \quad (86)\end{aligned}$$

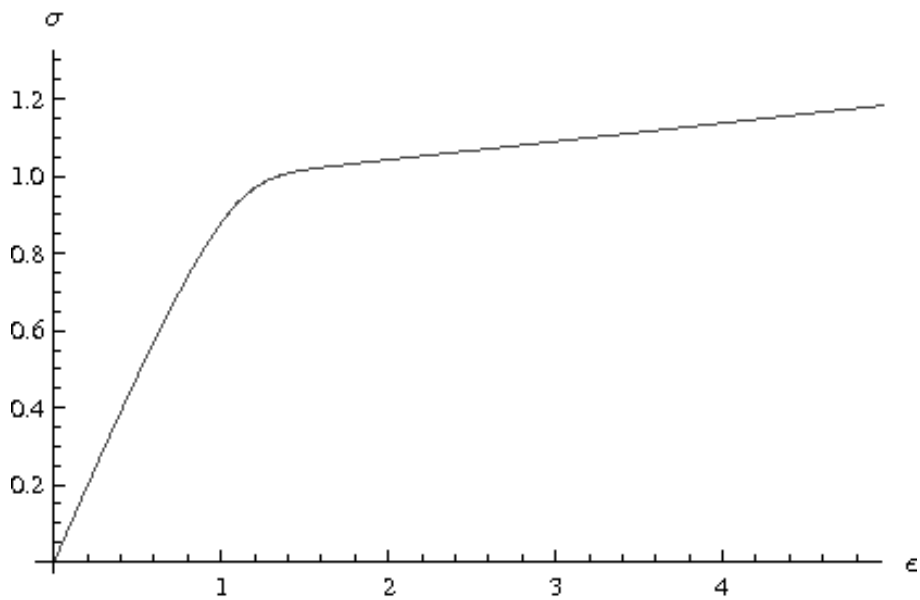
Vagyis, attól függően, hogy a képlékeny deformáció növekszik, vagy csökken, a  $\sigma_c$  előtti előjelet megváltoztatjuk az (83)-(84) egyenletrendszerben. Az itt tárgyalt homogén esetben a POYNTING-THOMSON-modellhez hasonlóan  $\epsilon_p$  akár ki is kiküszöbölhető. A (83)-(86) egyenletekkel egy reológiai-képlékeny POYNTING-THOMSON-testet adtunk meg feszültségi (TRESKA) típusú képlékenységi feltétellel.

Tekintsünk először egy mechanikai egyensúlyi esetet, amikor nincs viszkozitás, a feszültség megegyezik a termostatikai feszültséggel, azaz  $t = t_s = \frac{\partial e_{pla}}{\partial \epsilon}$ , a viszkózus feszültség nulla. Legyen a felterhelés sebessége  $v = 1$ , a határfeszültség  $\sigma_c = 1$ , a további paraméterek értékei pedig  $l = 0.05$ ,  $G = 1$  és  $\bar{G} = 0.05$   $\epsilon(0) = 0$ . Ekkor a deformáció időfüggése az 6. ábrán, a feszültség deformációfüggése pedig a 7. ábrán látható. Az  $l$  képlékenységi paraméter szerepét a 8 ábrán szemléltetjük, ahol  $l = 0.01, 0.1, 1, .$  Itt a kisebb paraméter élesebb folyáshatárt jelent.  $l$  és  $\hat{l}_1$  szerepe tulajdonképpen hasonló, ha együtt lépnek fel. Nagy  $\hat{l}_1$  és kis  $l$  eredményez éles képlékeny átmenetet.

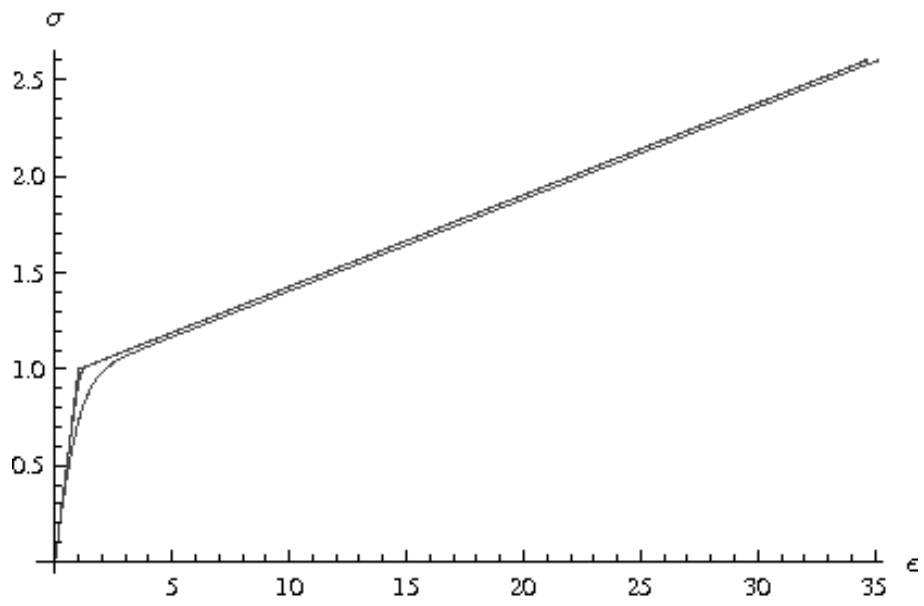
A fenti egyenletrendszer egy lineárisan kinematikai keményedési modell, ahogy azt a 4. ábra mutatja. Itt  $\sigma_c = 0.5$  és  $t = 0.6$ -nál a terhelési sebesség előjelet vált. A színváltások a képlékeny deformáció monoton változásának szakaszait jelzik, amikor a differenciálegyenletben a megfelelő tag előjelet vált. Megfigyelhető a "ratcheting" jelensége is, bár itt csak egyetlen ciklust ábrázoltunk.



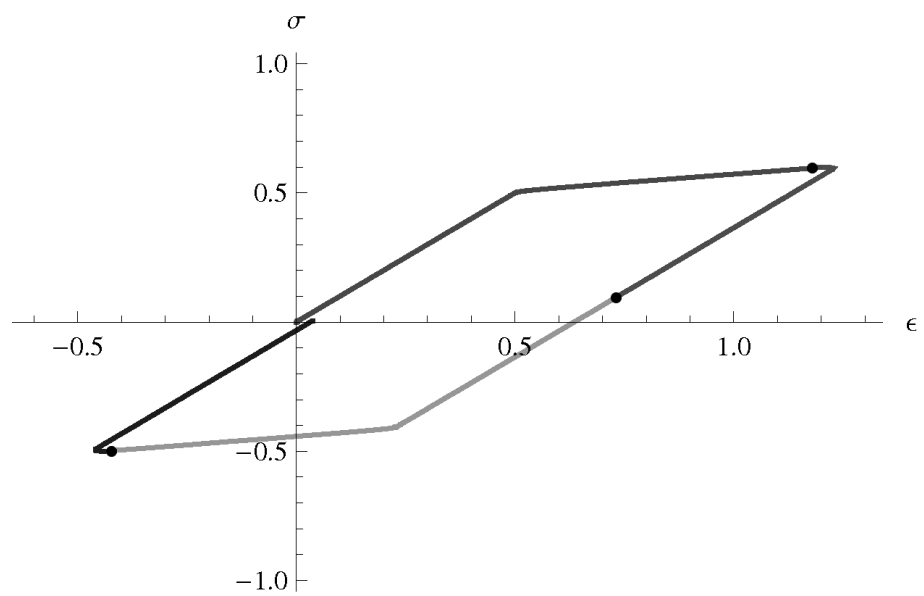
6. ÁBRA. Mechanikai egyensúly, a deformáció időfüggése



7. ÁBRA. Mechanikai egyensúly, a feszültség deformációfüggése



8. ÁBRA. Az  $l$  paraméter szerepe ( $l = 0.01, 0.1, 1$ , felülről lefele).



9. ÁBRA. Hiszterézis

## 6. KÖVETKEZTETÉSEK ÉS MEGJEGYZÉSEK

A képlékenységtanba disszipációt is bevezető elméletek általában csak a KELVIN-VOIGT-testet tartalmazzák, azaz csak a viszkózus hatásokat képesek modellezni. Maugin ugyan említi, hogy a relaxációs hatásért felelős MAXWELL-test is a termodinamikai elmélet része, de annak modellezésére külön belső változót vezet be [8]. Másrészt, a keményedésért és a képlékenységért felelős belső változókat is sokan különválasztják [16]. Az általunk tárgyalt modellben egyetlen belső változó modellezi a kúszási, a relaxációs és a képlékenyedési jelenségeket.

A képlékenységre vezető alapfeltevés az, hogy a vezetési egyenletek által eredményezett disszipáció nem feltétlen a klasszikus lineáris és konstans együtthatók által sugallt kvadratikus, a termodinamikai áramokban másodrendűen homogén formájú lehet, hanem attól eltérő, a termodinamikai áramokban elsőrendűen pozitívan homogén is. Speciálisan a belső változóhoz tartozó tagról elegendő feltételezni ezt a tulajdonságot. Az általunk itt javasolt ONSAGER-együttható formák erre vezetnek.

A hagyományos tárgyalásban alapfogalomként — képlékeny potenciálként és egyúttal folyásfüggvényként - használt disszipációs potenciálok létezésének feltétele a ONSAGER reciprocitási relációinak fennállása, azaz a szimmetrikus vezetési mátrix (pontosabban a nemlineáris GYARMATI-LI reciprocitási relációkat kell megkövetelnünk [40, 41]). Ezért egy általános tárgyalásban a belső változó időderiváltjától függő disszipációs potenciál helyett érdemes a vezetési egyenletekből kiindulni. Ez esetben vizsgálható, hogy ez az általánosítás mennyiben vezet a nem kapcsolt képlékenység leírására.

Viszkózus, reológiai hatások regularizálják és stabilizálják, megoldhatóbbá teszik az az ideális képlékenység egyenleteit [9]. Az egyenletek (teljes parciális differenciálegyenletek rendszer) sajátos szerkezete miatt a szokásos numerikus stabilizálási technikák (hiperbolikus kiegészítés, numerikus viszkozitás) nem működnek a képlékenység esetén. A fenti differenciálegyenletek például  $l = 0$  esetben már nem differenciálegyenletek, ezért nehezebben értelmezhetőek és tárgyalhatóak numerikusan. Tárgyalás módunk értelmezi a képlékeny deformációval kapcsolatos irreverzibilitást, ezért klasszikus képlékenység-elméleten túlmutató, valódi dinamikus képlékenységi feladatok esetén lehet jelentősége, mint például a képlékenyedési frontok terjedésének modellezése.

## 7. KÖSZÖNETMONDÁS

Köszönet MATOLCSI TAMÁSNAK, aki rávilágított a képlékenységelmélet működésére, ASSZONYI CSABÁNAK, FÜLÖP TAMÁSNAK és FEKETE TAMÁSNAK akikkel együtt még most sem gondolom, hogy ez ilyen egyszerű lenne, de akik bíznak benne, hogy már így is sok



mindenre jó. A munkát az Otká K81161 pályázatával támogatta.

## IRODALOM

- [1] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965. Handbuch der Physik, III/3.
- [2] G. Maugin. Szóbeli közlés.
- [3] Bojtár I. *Mechanikai anyagmodellek*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988. in Hungarian.
- [4] D. Kolymbas. *Introduction to hypoplasticity*. A. A. Balkema, Rotterdam-Brookfield, 2000.
- [5] J. R. Rice. Inelastic constitutive relations for solids: an internal-variable theory and its application to metal plasticity. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 19:433–455, 1971.
- [6] H. Ziegler. *An introduction to thermomechanics*, volume 21 of *Applied mathematics and mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1981.
- [7] G. A. Maugin. *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, Cambridge, etc., 1992.
- [8] G. Maugin. *The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors (An introduction)*. World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1999.
- [9] M. E. Gurtin. On the plasticity of single crystals: free energy, microforces, plastic strain gradients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:989–1036, 2000.
- [10] H. Ziegler and C. Wehrli. On a principle of maximal rate of entropy production. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 12:229–243, 1987.
- [11] G. A. Maugin. *Material inhomogeneities in elasticity*. Chapman and Hall, London..., 1993.
- [12] G. A. Maugin. *Nonlinear waves in elastic crystals*. Oxford University Press, Oxford-etc., 1999.
- [13] G. A. Maugin and W. Muschik. Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 19:217–249, 1994.

- [14] G. A. Maugin. Internal variables and dissipative structures. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 15:173–192, 1990.
- [15] Asszonyi Cs. Ván P. és Szarka Z. *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota*, volume 5 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007. ISBN 978-963-420-932-4.
- [16] M. Jirásek and Z. P. Bažant. *Inelastic analysis of structures*. John Wiley and Sons, 2002.
- [17] Milan V. Mićunovic. *Thermodynamics of viscoplasticity*. Springer Verlag, 2009.
- [18] M. Ristinmaa and N. S. Ottosen. Viscoplasticity based on an additive split of the conjugated forces. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17:207–235, 1998.
- [19] M. Ristinmaa and N. S. Ottosen. Consequences of dynamic yield surface in viscoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 37:4601–4622, 2000.
- [20] G. T. Houlsby and A. M. Puzrin. *Principles of hyperplasticity (An approach to plasticity theory based on thermodynamic principles)*. Springer, London, 2006.
- [21] Ván P. és Asszonyi Cs. Az általános törvényszerűségek. In Asszonyi Cs., editor, *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye*, volume 3 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 2, pages 25–87. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [22] T. S. Bíró and P. Ván. About the temperature of moving bodies. *Europhysics Letters*, 89:30001, 2010. arXiv:0905.1650v1.
- [23] E. Verlinde. On the origin of gravity and the laws of Newton. 2010. arXiv:1001.0785.
- [24] A. Ruina and R. Prapat. *Introduction to Statics and Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [25] B.N.J. Persson and A. I. Volotikin. Theory of rubber friction: Nonstationary sliding. *Physical Review B*, 65:134106, 2002.
- [26] Verhás J. White area on the map of applying non-equilibrium thermodynamics. sliding friction. 2009. Fudom'09 előadás és kézirat.
- [27] J. Verhás. *Thermodynamics and Rheology*. Akadémiai Kiadó and Kluwer Academic Publisher, Budapest, 1997.
- [28] G. A. Kluitenberg. On dielectric and magnetic relaxation phenomena and non-equilibrium thermodynamics. *Physica A*, 87A:302–330, 1977.

- [29] G. A. Kluitenberg and V. Ciancio. On linear dynamical equations of state for isotropic media. *Physica A*, 93:273–286, 1978.
- [30] Verhás J. *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [31] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer Verlag, Berlin-etc., 1992. 3rd, revised edition, 2001.
- [32] I. Gyarmati. The wave approach of thermodynamics and some problems of non-linear theories. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2:233–260, 1977.
- [33] P. Ván, A. Berezovski, and Engelbrecht J. Internal variables and dynamic degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33(3):235–254, 2008. cond-mat/0612491.
- [34] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 12(3):146–173, 2003. (cond-mat/0112214).
- [35] T. Matolcsi. *Ordinary thermodynamics*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 2005.
- [36] A. Bertram. *Elasticity and plasticity of large deformations (An introduction)*. Springer, 2005.
- [37] Gyarmati I. *Nemegyensúlyi termodinamika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
- [38] J. Meixner. Consistency of the Onsager-Casimir reciprocal relations. *Advances in Molecular Relaxation Processes*, 5:319–331, 1973.
- [39] I. Gyarmati. *Non-equilibrium Thermodynamics /Field Theory and Variational Principles/*. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [40] I. Gyarmati. On the phenomenological basis of irreversible thermodynamics. *Periodica Polytechnica Ser. Chem. Engng. Budapest*, 5:219–243, 321–339, 1961.
- [41] J. C. M. Li. Persistency, pseudo-entropy and thermokinetic potential. *Physical Review*, 127:1784–1786, 1962.

## AZ ANYAGI INSTABILITÁS VIZSGÁLATÁNAK LEHETŐSÉGEI

*Béda Péter*

MTA-BME GÉPEK ÉS JÁRMŰVEK DINAMIKÁJA KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST  
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

*A kontinuumok anyagi instabilitásának vizsgálata során a következő alapvető kérdések és problémák vethetők fel: van-e egységes definíció az anyagi instabilitásra, található-e általános módszer az egyes instabilitási esetek vizsgálatára, indokolt-e a szakirodalomban mutatkozó eltérés a véges szabadságfokú rendszerek és a kontinuumok stabilitásvizsgálati módszereiben. A dolgozat a felsoroltakat a dinamikai rendszerek elméletének eszközeivel kívánja tárgyalni. Ennek megfelelően előnyösnek ígérkezik a kontinuumot dinamikai rendszerként kezelni, és szükséges a szilárd testek mechanikájában használt anyagi instabilitási esetek és a stabilitásvesztéssel kapcsolatos egyes fogalmak, valamint a dinamikai rendszerek stabilitáselmélete és tipikus stabilitásvesztési módjai (statikus, illetve dinamikus bifurkáció) közötti összefüggések megkeresése.*

### BEVEZETÉS

A szilárd testek mechanikájának az utóbbi évtizedekben egyre nagyobb jelentőségű kutatási területe az anyagi instabilitás jelenségeinek tanulmányozása. A témával különösen az 1960-as, 70-es években több dolgozat foglalkozott. Ezek közül alapvető RUDNICKI és RICE cikke [65]. Ebben a szerzők a szakirodalomban publikált olyan vizsgálatok eredményeit összegzik, melyek a szokásos nyomókísérlet során a kőzetekben jelentkező rideg töréssel foglalkoznak. Azt találják, hogy a kísérleti próbatestekben a kvázi-statikusan növekvő terhelés hatására kialakuló roncsolódás egy keskeny, nyírási vonalnak (az angol szakirodalomban „shear band”) nevezett rétegre korlátozódik.

RUDNICKI és RICE hipotézise szerint ez a (lokalizációnak is nevezett) jelenség az anyag (makroszkopikus) inelasztikus viselkedésének egyfajta instabilitásaként értelmezhető. Mivel ennek az állapotnak a kialakulásában az anyag tulajdonságát leíró

konstitutív egyenletek szerepe a meghatározó, a jelenséget konstitutív, vagy később anyagi instabilitásnak nevezik.

A konstitutív egyenletekhez kapcsolódó instabilitás fogalma eredetileg DRUCKER [34], [35], [36], illetve HILL [42], és BISHOP [25] munkáin alapszik. Ezen klasszikus definíciók mellett, a dinamikai rendszerek elméletében az utóbbi évtizedekben bekövetkezett jelentős fejlődés hatására, több szerző alkalmaz a Ljapunov stabilitással analóg megfogalmazásokat. Így jár el például BOLOTIN [26], ERINGEN [37].

A legújabb kutatások döntően numerikusak, azonban szinte minden esetben végeznek analitikus számításokat is (példaként említhetjük PETRYK és THERMANN 2002-ben megjelent cikkét [64]). A különféle feladatokban felmerülő anyagi instabilitási jelenségek vizsgálatát az egyes cikkek szerzői, az alapegyenletek felírása után, más-más stabilitási–instabilitási definíciók mellett végzik.

A stabilitás megfogalmazás mellett természetesen az alkalmazott módszerekben is eltérés van. A legfontosabbak

- a DRUCKER-posztulátumra alapozott számítás;
- a konzervatív rendszerekre érvényes teljes potenciális energia minimum feltételeinek keresése;
- a RICE [9] által alkalmazott módon a negyedrendű konstitutív érintő tenzor, és a hozzá kapcsolódó akusztikus tenzor sajátértékeinek vizsgálata;
- az anyag homogén állapotának harmonikus hullámmal, vagy periodikusan perturbált viselkedésének követése.

Az eddigiekben említetteknek megfelelően, a kapott eredmények értelmezése több ponton is erősen vitatott. A megoldatlan kérdések két példája kerül előtérbe a jelen értekezésben. Az egyik a végeelem módszer alkalmazásánál sok esetben fellépő „mesh sensitivity”, melyet részleteiben DE BORST és munkatársai 1993-ban publikált [29] összefoglaló cikke mutat be. Az angol nyelvű szakirodalomban a „mesh sensitivity” alatt azt – a lényegében numerikus bizonytalanságot – értik, amikor egy végeelem módszer alkalmazásával megoldott feladat eredményét (például a lokalizációs zóna méretét vagy orientációját) döntően befolyásolja az alkalmazott végeelem háló felvétele.

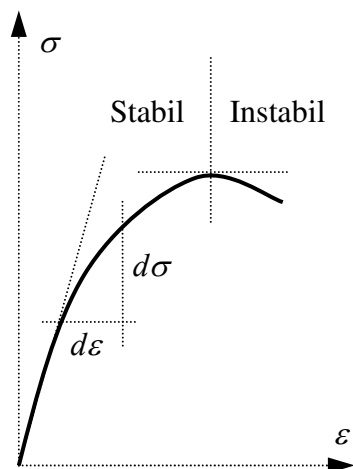
A már 1976-ban RICE [9] által felvetett „flutter” jelenség értelmezése a másik probléma. Fontosabb cikkek ebben a témában például NEEDLEMAN és TVERGAARD [8], LORET és HARIRECHE [44], illetve BIGONI és WILLIS [6] munkái.

Mindezek alapján felmerül, hogy lehetséges-e egységes megközelítés, és ha igen, akkor milyen módon végezhető el az anyagi instabilitás vizsgálata.

Ebben a dolgozatban az anyagi instabilitási jelenségeket a dinamikai rendszerek stabilitáselméletének eszközeivel fogjuk vizsgálni. A kontinuumot dinamikai rendszerként vizsgálva megmutatjuk például, hogy összefüggés van a dinamikai rendszer kritikus sajátértékeihez tartozó altér dimenziója és a „mesh sensitivity” jelenség között. Hasonló módszerrel levezetjük azt is, hogy a klasszikus értelemben vett [9] lokalizáció (illetve „divergencia”) típusú instabilitás során egy dinamikai rendszer sajátértékei nullán át negatívról pozitívrá válnak előjelet, míg a „flutter” típusú instabilitás esetében a komplex sajátértékek valós része válik pozitívvá.

#### AZ ANYAG STABIL VAGY INSTABIL ÁLLAPOTA A KONTINUUM MECHANIKÁBAN

A szakirodalomban alapvető RUDNICKI és RICE cikke [65]. Dolgozatuk kiinduló gondolata az, hogy a lokalizációs réteg nem mikroszkopikus repedések egyesülése révén jön létre, miként azt korábban mások feltételezték. A szerzők magyarázata szerint a lokalizációs tartomány kialakulása – a kontinuum hipotézis fennállása mellett – az anyagnak a konstitutív egyenletből levezethető egyfajta instabil viselkedésére utal.



1. ábra. Az egytengelyű szakítódiagram stabil és instabil szakaszai

Feltételezésük szerint a szilárd test deformációja kiinduláskor homogén, és a konstitutív relációk szerepe a döntő abban, hogy a növekvő terhelés során az alakváltozási állapot egy elágazási (bifurkációs) ponthoz ér. Ekkor egy olyan inhomogén alakváltozási állapot jelenik meg, amelyben a deformáció nagy része egy síkokkal határolt igen keskeny lokalizációs zónába (pl. nyírési vonal) koncentrálódik úgy, hogy azon kívül a homogenitás megmarad.

Az instabilitás ilyen értelmezése részben eltér a kontinuumok mechanikájában, a konstitutív egyenletek megfogalmazása során, korábban felvetett stabilitás – instabilitás problematikától. Ennek részletes összefoglalása található LUBLINER könyvében

[46]. Megtudhatjuk belőle, hogy az egytengelyű  $\sigma$  feszültség és  $\epsilon$  nyúlás függvényét ábrázoló szakítódiagramon, az 1. ábrán bemutatott

$$d\epsilon d\sigma$$

szorzat előjele alapján, stabilnak, illetve instabilnak adódó szakasz különíthető el. Többtengelyű feszültségállapotra történő kiterjesztéséből DRUCKER 1951 és 1959 között publikált cikkeiben [34], [35], [36], valamint BISHOP és HILL 1951-ben [25] adott stabilitási kritériumokat. Az idézett könyvében LUBLINER megemlíti azt is, hogy MANDEL már 1964-ben kimutatta [47], hogy a DRUCKER (illetve BISHOP és HILL) által kidolgozott feltételek nem szükséges feltételek.

Egy másik, a konstitutív elméleteknél jelentkező stabilitási fogalom az alapja PETRYK [54], [55], [56], [57], [58], [59], illetve PETRYK és THERMANN [60], [57], [61], [62], [63] számos publikációjának. A megközelítés [46] értelmezésében a rugalmas stabilitáson, illetve a LAGRANGE–DIRICHLET tételén [38] alapszik. A rugalmasságtanban alkalmazott stabilitás fogalom egész részletesen olvasható például NGUYEN [53] jegyzetében. Ki kell azonban emelni, hogy a PETRYK által végzett stabilitásvizsgálat csak konzervatív rendszerekre érvényes.

Ez a definíció és stabilitásvizsgálati módszer tulajdonképpen megegyezik a dinamikai rendszerek elméletében alkalmazott Ljapunov értelemben vett stabilitással, és az úgynevezett Ljapunov-féle direkt módszerrel (részletesen lásd ROUCHE és szerzőtársai [68] könyvében).

A rugalmasságtanban alkalmazott képletek (lásd TRUESDELL [73], illetve MARSDEN és HUGHES [48]) kiterjesztésével, a stabilitás egy másik megközelítése is ismert. Itt fontos szerepet játszik a

$$(1) \quad (K_{ijkl})^{elastic} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

negyedrendű rugalmassági tenzort felhasználva definiált, a testben az  $\mathbf{n}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) egységvektor irányában terjedő hullámok sebességét megadó

$$(1) \quad \left[ \frac{1}{\rho} (K_{ijkl})^{elastic} n_i n_j \right] \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

akusztikus tenzor, mellyel többek mellett GURTIN [40] foglalkozik részletesen. Kimutatja, hogy ez a tenzor pozitív definit akkor és csak akkor, ha a negyedrendű rugalmassági tenzor egy szigorú értelemben vett elliptikus („strongly elliptic”) tenzor.

A (1) és (2) tenzorok általánosításaként vezetik be a nem-rugalmas alakváltozásra a konstitutív érintő tenzort, valamint a hozzá kapcsolódó akusztikus tenzort (például HILL [42] és RICE [9]). A szakirodalom szerint ha a konstitutív érintő tenzor összes sajátértéke valós és pozitív (vagyis fennáll szigorú értelemben vett elliptikus tulajdonság), akkor az anyag állapota stabil. RICE nyomán az anyagi instabilitás felléptét a szigorú értelemben vett elliptikusság elvesztésével („loss of strong ellipticity”) azonosítják.

RUDNICKI és RICE [65] az anyagvizsgálati nyomó kísérletnek megfelelően terhelt kontinuumok esetét vizsgálta. STÖREN és RICE [67] egy, a próbatestek húzása során megfigyelt, instabilitási jelenség esetét vizsgálja hasonló módon. Ez az instabilitás a fémek anyagok jellegzetes szakító vizsgálatában lép fel a törést közvetlenül megelőző befűződés kialakulásánál (az angol szakirodalomban „necking”).

Egy későbbi dolgozatában RICE [9] kettéválasztja a lokalizációs zóna egzisztenciájára, illetve az anyagban mozgó szinguláris felület (általánosított hullám) terjedésének

feltételeire vonatkozó vizsgálatokat. Ebben témában alapvető munka THOMAS könyve [71], mely szintén tárgyal stabilitásra vonatkozó vizsgálatokat HADAMARD [41] könyvére építve. RICE [9] a hullám terjedésének tulajdonságait leíró akusztikus tenzor felhasználásával az anyagi instabilitás két alaptípusát különíti el. Ezek az akusztikus tenzor sajátértékeinek vizsgálatához kapcsolódnak, és a negyedrendű konstitutív érintő tenzorhoz kapcsolódó akusztikus tenzorra vonatkoznak.

Az anyag állapota stabil, ha az akusztikus tenzor összes sajátértéke pozitív. Amennyiben egy közülük nulla értéket vesz fel, úgynevezett „divergencia” típusú instabilitás lép fel. Ennek fizikai interpretációját az alakváltozás lokalizációjának jelenségei adják. A másik lehetőség az anyagi instabilitás fellépésére az az eset, amikor az akusztikus tenzor sajátértékére komplex szám adódik. Az angol nyelvű szakirodalom ezt az esetet „flutter” néven említi. A „flutter” típusú instabilitásra mindeztidáig kielégítő fizikai interpretációt nem találtak [8], noha bizonyos részeredmények már ismertek például BIGONI, LORET és WILLIS több munkájában [6], [23], [24], [21], [22]. MARTINS és munkatársai kimutatták a peremfeltétel által generált „flutter” megjelenését is [45].

Mivel az akusztikus tenzor sajátértékei a hullám terjedési sebességeinek négyzetei, a hullámterjedéssel kapcsolatos megközelítés kissé leegyszerűsítve azt jelenti, hogy a szilárd test állapota stabil, ha a benne keltett hullámok regulárisan terjednek. Gyakran ezek a hullámok harmonikusak, mint RICE [9], vagy az utóbbi években ZHANG és SCHREFLER [74] cikkében.

RICE 1976-ban publikált cikke [9] az anyagi instabilitás egyik klasszikus és sokszor idézett referenciája. Az ott alkalmazott negyedrendű konstitutív érintő tenzorhoz kapcsolódó akusztikus tenzor jelenleg is fontos eszköze az anyagi instabilitással kapcsolatos vizsgálatoknak. Ezen tenzor sajátértékeinek vizsgálatára épített eljárás alapján kiterjedt képlékeny instabilitási vizsgálatokat végez SCHREYER [52].

Még a legfrissebb publikációk is gyakran a RICE [9] munkájában leírt módszert követik (RUDNICKI [69]). Egyes esetekben kísérleti adatokkal is kiegészítik a vizsgálatokat mint DESRUES és CHAMBON [31]. Hasonló eredményre vezet a periodikus perturbációs stabilitásvizsgálat. BENALLAL és COMI [20] összehasonlítja a RICE-féle (a negyedrendű konstitutív érintő tenzor és a hozzá kapcsolódó) akusztikus tenzorral alapozott, a harmonikus hullámokkal végzett és a perturbációs módszereket. A szerzők a feladatban alkalmazott változó függvény mezőket (az elmozdulásmezőt, a feszültségmezőt, stb.) perturbálják.

A jelen dolgozatban az egyes instabilitási típusokat, a hagyományosan a negyedrendű konstitutív érintő tenzorhoz kapcsolódó akusztikus tenzor sajátértékeivel definiált „divergencia” és „flutter” elnevezések helyett, *statikus* és *dinamikus bifurkáció*-nak fogjuk hívni. A két fogalom részletes bevezetését a dinamikai rendszerekkel foglalkozó



szakirodalomban találjuk (példaként említhető CHOW és HALE [28] vagy TROGER és STEINDL [72] könyve).

A hagyományos anyagmodelleken végeselem módszerrel végzett numerikus vizsgálatok, az anyagi instabilitás jelenségeinél, egyfajta számítási bizonytalanságot, nevezetesen erős függést mutattak az elemek méretétől. Egyes konkrét dinamikus feladatokban sebességfüggő anyagtörvény (például viszkózus csillapítás hatása) alkalmazásával oldják meg ezt a problémát. Így jár el például DE BORST, SLUYS, MÜHLHAUS szerzőtársaival több cikkében [66], [29], [51].

A bizonytalanság kiküszöbölésére a numerikus vizsgálatokban alkalmazott másik lehetőség az úgynevezett nem-lokális anyagmodellek (gradiens-függő anyag, anyagi hosszúság stb.) használata [12], [13], [10]. MÜHLHAUS és AIFANTIS [50], DE BORST és MÜHLHAUS [30], valamint DE BORST és társszerzői részletes összefoglalást adnak az egyfázisú, gradiens-függő szilárd kontinuumokban fellépő lokalizációs jelenségek analitikus és numerikus vizsgálatairól.

Végezetül megemlíjtük, hogy a szilárd testek anyagi instabilitási problémáiban már többen sikerrel alkalmazták – pl. AN [3], [4], illetve AN és SCHAEFFER közleményében [5] – a bifurkációelmélet strukturális stabilitás, tipikusság fogalmát (az ARNOLD [17] könyvben szereplő felfogásban), vagy a stabilitásnak a dinamikai rendszerekkel kapcsolatos értelmezését (DE BORST [27], DOBOVSEK [32], vagy DOBOVSEK és MORAN [33]). Ezek a dolgozatok azonban csak a már (végeसेlemes, illetve periodikus perturbációs módszerekkel) diszkretizált esetre szorítkoztak, és a probléma végtelen dimenziós jellegétől lényegében eltekintettek.

#### DINAMIKAI RENDSZEREK ÉS A BIFURKÁCIÓELMÉLET

A Ljapunov értelemben vett stabilitás lényege az, hogy a vizsgált (például a  $v = 0$ ) egyensúlyi megoldást (az  $S^0$  állapotot) stabilnak mondjuk, ha a megzavart  $v'(t)$  megoldás (sebességmező) „legendően közel” marad  $v = 0$ -hoz a  $t$  idő minden pozitív értékére. Hasonló definíciókat a kontinuum mechanikában is többen használnak, például HILL [43], ERINGEN [37], vagy NGUYEN [53]. A következő bekezdésben a legalapvetőbb stabilitási definíciót írjuk fel.

Legyen valamely

$$(3) \quad \dot{x} = g(x), \quad x \in R^n$$

$n$ -dimenziós közönséges autonóm differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi helyzete  $x = 0$ , azaz

$$0 = g(0).$$

Jelölje a (3) rendszernek az  $x^0$  kezdeti értékhez tartozó megoldását  $x(x^0, t)$ . Ekkor a definíció a következőként adható meg:

Azt mondjuk, hogy a (3) differenciálegyenlet-rendszer 0 egyensúlyi helyzete Ljapunov értelemben stabil, ha minden tetszőleges kicsi  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $\delta > 0$  szám, hogy minden olyan megoldásra, amelynél

$$|x^0 - 0| < \delta \Rightarrow |x(x^0, t) - 0| < \varepsilon$$

$t$  minden pozitív értékére.

Kiemeljük, hogy ebben a definícióban – és csak itt – a dolgozat jelölési rendszerétől eltérve  $\varepsilon$  nem alakváltozás, vagy alakváltozási tenzor, hanem az analízisben használt kis pozitív valós szám. Ezt a jelölési anomáliát azért vállaltuk, mert további fontos definíciók, és a Ljapunov függvényen alapuló stabilitási vizsgálatok, a dinamikai rendszerek elméletének szakirodalmában ilyen jelölésekkel találhatók meg (lásd például ROUCHE és munkatársai [68] könyvében).

A dinamikai rendszer legegyszerűbb reprezentációja az  $n$  dimenziós autonóm differenciálegyenlet-rendszer. Egy  $R^n$ -ben definiált (3) alakú autonóm differenciálegyenlet-rendszer egy

$$\varphi_t : U \mapsto R^n$$

folyamot [14] definiál, ahol  $U \subset R^n$ , azaz

$$\varphi_t(x^0) = x(x^0, t).$$

A  $\varphi_t$  az  $x \in U$  és  $t$  változók sima függvénye, és teljesíti a

$$(4) \quad \varphi_t(x) = x, \text{ illetve } \varphi_{\tau+t}(x) = \varphi_t(\varphi_\tau(x))$$

félcsoport tulajdonságokat. A (4) feltételek megfogalmazása lehetővé teszi a dinamikai rendszer értelmezését végtelen dimenzióra is. A részletek megtalálhatók például TEMAM könyvében [70], ahol a  $g$  algebrai operátor helyett egy adott függvényter elemein értelmezett differenciáloperátor áll.

Szót kell még ejteni a strukturális stabilitás és bifurkáció fogalmainak a dinamikai rendszerek elméletében szokásos értelmezéséről. A pontos és általános definíciók az alkalmazott matematikai szakirodalomban találhatóak meg (néhány fontosabb összefoglaló MARS DEN és MCCRACKEN [49], CHOW és HALE [28], TROGER és STEINDL [72], WIGGINS [11] könyve).

A szakkifejezéseket ARNOLD magyar nyelven is megjelent könyveinek [14], [15], [16] megfelelően használjuk. Jelen munkában mindössze a fogalmak vázlatos bemutatására törekszünk az alkalmazott szóhasználat egyértelműsége céljából. Erre

azért van szükség, mert a bifurkáció kifejezést a mechanika szakirodalma többféle értelemben is használja.

Vezessük be először a  $\mu$ ,

$$|\mu| \ll 1,$$

valós (úgynevezett bifurkációs) paramétert, illetve a (3) egyenlet helyett vizsgáljuk a  $\mu$ -tól függő

$$(5) \quad \dot{x} = g(x, \mu), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R$$

egyenletet. Legegyszerűbb esetként tegyük fel, hogy az (5) differenciálegyenlet-rendszernek az  $x = 0$  egyensúlyi helyzete marad  $\mu \in R$  paraméter minden értékére:

$$0 = g(0, \mu).$$

Korlátozzuk a vizsgálatot a 0 egyensúlyi helyzet „elegendően kicsiny”  $S_1 \subset R^n$  környezeteire ( $0 \in S_1$ ), illetve a bifurkációs paraméter „elegendően kicsiny” értékeire: adott  $\delta > 0$  mellett

$$(6) \quad |\mu| < \delta \ll 1.$$

Definiálja az  $I_\delta$  intervallumot a (6) feltételt kielégítő  $\mu$  értékek halmaza. Vizsgáljuk ezután a

$$(7) \quad g_\mu : S \rightarrow U, \text{ ahol } \mu \in I_\delta$$

leképzéssel megadott lokális vektormezőket.

Tegyük fel, hogy bármely  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_2 < 0$  ( $\mu_1, \mu_2 \in I_\delta$ ) paraméterpárra teljesül, hogy a  $g_{\mu_1}$  és  $g_{\mu_2}$  vektormezőkre fennáll az úgynevezett orbitális topologikus ekvivalencia (részletes definíció például ARNOLD [16] könyvében található a 80–87. oldalakon). Ekkor azt mondjuk, hogy (7) strukturálisan stabilis.

Hasonló konstrukció adható pozitív előjelű paraméterpárokra is. Feltesszük, hogy bármely  $\mu_3 > 0$ ,  $\mu_4 > 0$  ( $\mu_3, \mu_4 \in I_\delta$ ) paraméterpárra teljesül a  $g_{\mu_3}$  és  $g_{\mu_4}$  vektormezők orbitális topologikus ekvivalenciája. Végül tegyük még fel, hogy nem létezik olyan  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_3 > 0$  paraméterpár, amelynél a  $g_{\mu_1}$  és  $g_{\mu_3}$  vektormezők orbitális topologikus ekvivalensek. Így két diszjunkt ekvivalencia osztályt kapunk  $\mu$  negatív, illetve pozitív értékeire, melyeken belül fennáll a strukturális stabilitás.

A szakirodalom (például TROGER és STEINDL [72], vagy GOLUBITSKY és SCHAEFFER [39]) a strukturális stabilitáshoz társítja az úgynevezett tipikusság fogalmát („generic”). Ebben az értelmezésben lényegében azt mondjuk, hogy valami akkor tipikus, ha strukturálisan stabilis. E két fogalom egészen általánosan is értelmezhető (a részletek

megtalálhatóak több könyvben így ARNOLD [17], TROGER és STEINDL [72], GOLUBITSKY és SCHAEFFER [39] munkáiban), és fontos szerepet játszik a fizikai jelenségek matematikai modellezésének kérdésében.

Az eddigi feltételek mellett a  $\mu = 0$  eset nem tartozik egyik ekvivalencia osztályba sem, ezt bifurkációs pontnak nevezzük. Amennyiben – a bifurkációs vizsgálatokban [72] szokásos módon – a  $\mu$  paraméter értékét negatívról kvázistatikusan növeljük,  $\mu = 0$ -nál az (5) fázisterében (lokálisan) kvalitatív változás jelentkezik. Ez lehet a megoldások számában vagy a Ljapunov stabilitásában történő változás, melyek történhetnek egyszerre vagy külön (például a Hopf-bifurkáció).

Ki kell emelni, hogy a bifurkációs pont megkereséséhez általában elegendő a linearizált egyenletet figyelembe venni. A bifurkációs vizsgálat során azonban arra törekszünk, hogy megállapítsuk a fázistérben végbemenő kvalitatív változás jellegét. Itt valójában a bifurkáció típusát vizsgáljuk, ezért ilyenkor már nemlineáris egyenletre van szükség.

#### KONTINUUM ALAPEGYENLETEI KIS ALAKVÁLTOZÁS ESETÉRE

Mivel a dinamikai rendszerek elméletében egy megoldás stabilitása lokális tulajdonság, ebben a részben a mozgó szilárd kontinuum mozgásegyenletét írjuk fel a kontinuum mechanika alapvető egyenleteinek kis alakváltozásra érvényes formáinak felhasználásával.

Vezessük be az  $\boldsymbol{\varepsilon}$  alakváltozási tenzort, a kontinuum elem  $\mathbf{u}$  elmozdulás-vektorát illetve a „ $\circ$ ” diadikus szorzást. Ekkor a geometriai egyenlet

$$(8) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}),$$

a mozgásegyenlet

$$(9) \quad \rho \ddot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\sigma} \nabla,$$

ahol  $\rho$  a sűrűséget,  $\boldsymbol{\sigma}$  pedig a (szimmetrikus) feszültségtenzort jelenti. Legyen adott a konstitutív egyenlet a következő általános formában

$$(10) \quad \mathbf{0} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma}),$$

illetve a későbbi számításokban használt derivált („rate-form”) alakban

$$(11) \quad \mathbf{0} = \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \nabla^2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \nabla \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \ddot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}).$$

A (10) anyagtörvény összefoglalja a sebességfüggő („rate-dependent”) tagokat [66], [29], az első [18], illetve második gradienst [19], [12], [13], [10], tartalmazó anyagtörvényeket.

Írjuk fel a  $\mathbf{V}$  alakváltozási sebességre ismert kinematikai egyenletet

$$(12) \quad \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}),$$

ahol  $\mathbf{v}$  a sebességmező. Végül megjegyezzük, hogy kis alakváltozás esetén érvényes a

$$(13) \quad \mathbf{V} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

képlet.

Tegyük fel, hogy a kontinuum valamely  $S^0$  állapotának stabilitását vizsgáljuk, és ez az  $\boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{v}^0, \dots$  értékekkel írható le. Ekkor az

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0,$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0,$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}^0,$$

új változók bevezetésével (11) linearizált és átrendezett formája az  $S^0$  állapotban

$$(14) \quad C^0 \ddot{\boldsymbol{\sigma}}' = C^1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' + C^2 \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}' + C^3 \nabla^2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' + C^4 \nabla \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' + C^5 \dot{\boldsymbol{\sigma}}',$$

ahol<sup>1</sup>

$$C^0 = -\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial (\ddot{\boldsymbol{\sigma}})} \right|_{S^0}, \quad C^1 = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})} \right|_{S^0}, \quad C^2 = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial (\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}})} \right|_{S^0},$$

$$C^3 = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial (\nabla^2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})} \right|_{S^0}, \quad C^4 = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial (\nabla \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})} \right|_{S^0}, \quad C^5 = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial (\dot{\boldsymbol{\sigma}})} \right|_{S^0}.$$

Tehát a kontinuum  $S^0$  állapotának lineáris stabilitásvizsgálata a (8), (9) és a (14) egyenlet felhasználásával végezhető el.

Transzformáljuk az egyenleteket a (12) és a (13) felhasználásával a sebességmezőre, és az egyszerűség kedvéért hagyjuk el a „,„” jelet, megjegyezve, hogy ezentúl az  $S^0$  állapot kis perturbációira szorítkozunk. Ekkor a (9), a (8) és a (14) egyenletek felhasználásával

<sup>1</sup> Megjegyezzük, hogy a (14) képlettől fogva a matematikában szokásos operátor jelölést alkalmazzuk a  $C^i$  tenzorokra. Ezek közül  $C^0, C^1, C^2, C^3, C^5$  negyedrendű (pl.  $C^0 = [c_{ijkl}^0]$  négyindexes), míg a  $C^4$  ötödrendű tenzor. Amikor az operátorokat alkalmazzuk a mögöttük álló tenzorokra, akkor 2-szeres, illetve  $C^4$  esetén 3-szoros kontrakciót értünk alatta, (pl.  $C^0 \ddot{\boldsymbol{\sigma}}' = [c_{ijkl}^0 \ddot{\sigma}'_{ij}]$  stb. lásd [7]).

$$(15) \quad \begin{aligned} 2\rho C^0 \ddot{\mathbf{v}} &= C^1 (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla + C^2 (\dot{\mathbf{v}} \circ \nabla + \nabla \circ \dot{\mathbf{v}}) \nabla + \\ &C^3 \nabla^2 (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla + C^4 \nabla (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla + 2\rho C^5 \ddot{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

adódik. Természetesen a (15) egyenlet mellé az adott feladatnak megfelelően kezdeti- és peremfeltételek is kapcsolódnak.

Megjegyezzük, hogy ha a (14) képletben  $C^0 = 0$ , azaz a (10) konstitutív egyenletben nem szerepel  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ , akkor nyilvánvalóan a (15) egyenlet is módosul. A klasszikus esetnek tekintett RICE [9] cikkben szereplő konstitutív egyenlet ugyanis nem függ  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ -től. Ekkor a (10) egyenlet csak úgy lehet konstitutív egyenlet, ha nem független  $\boldsymbol{\sigma}$ -től, azaz  $C^5 \neq 0$ . Az ellenkező esetben  $C^0 = 0$ ,  $C^5 = 0$  mellett a (10) egyenletben egyáltalán nem szerepelne a feszültségtenzor semmilyen formában, ezt a lehetőséget pedig nyilvánvalóan ki kell zárni.

A (15) egyenletből kis átrendezéssel

$$(16) \quad C^0 = 0, \quad C^5 \neq 0$$

és  $(C^5)^{-1}$  inverz létezése mellett

$$(17) \quad \begin{aligned} \ddot{\mathbf{v}} &= -\frac{(C^5)^{-1} C^1}{2\rho} (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla - \frac{(C^5)^{-1} C^2}{2\rho} (\dot{\mathbf{v}} \circ \nabla + \nabla \circ \dot{\mathbf{v}}) \nabla - \\ &\frac{(C^5)^{-1} C^3}{2\rho} \nabla^2 (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla - \frac{(C^5)^{-1} C^4}{2\rho} \nabla (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla \end{aligned}$$

adódik.

#### STABILITÁSVESZTÉSI MÓDOK, STATIKUS ÉS DINAMIKUS BIFURKÁCIÓ

Legyen  $C^5 \neq 0$ , azaz tegyük fel, hogy a (10) konstitutív egyenletben szerepel a  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  derivált feszültség. Tegyük fel továbbá, hogy a  $(C^5)^{-1}$  inverz létezik. Ezután írjuk át a kis perturbációkra vonatkozó (15) egyenletet a

$$(18) \quad \ddot{\mathbf{v}} = F^1 \mathbf{v} + F^2 \dot{\mathbf{v}} + F^3 \ddot{\mathbf{v}}$$

alakba, ahol

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

a perturbáló sebességmező függvényei, amelyek kielégítik a homogén peremfeltételeket. A rájuk ható  $F^1, F^2, F^3$  lineáris differenciáloperátorok pedig a (15) jobb oldala szerint definiáltak, azaz:

$$\begin{aligned}
(19) \quad F^1 \mathbf{v} &:= \frac{(C^0)^{-1} C^1}{2\rho} (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla - \frac{(C^0)^{-1} C^3}{2\rho} \nabla^2 (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla \\
&\quad - \frac{(C^0)^{-1} C^4}{2\rho} \nabla (\mathbf{v} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{v}) \nabla, \\
F^2 \dot{\mathbf{v}} &:= \frac{(C^0)^{-1} C^4}{2\rho} (\dot{\mathbf{v}} \circ \nabla + \nabla \circ \dot{\mathbf{v}}) \nabla, \\
F^3 \ddot{\mathbf{v}} &:= (C^0)^{-1} C^5 \ddot{\mathbf{v}}
\end{aligned}$$

Így a (18) egyenlet egy végtelen dimenziós dinamikai rendszernek tekinthető (lásd [70]).

Definiáljuk a kontinuum valamely  $S^0$  állapotának stabilitását a (18) operátor egyenlet megfelelő  $\mathbf{0} (\equiv \mathbf{v}^0(t))$  triviális megoldásának *Ljapunov*-féle stabilitásaként. A  $\mathbf{0}$  megoldás (lokális) stabilitásvizsgálata ezen megoldás kis perturbációira vonatkozik. Transzformáljuk most (18)-at egy differenciálegyenlet-rendszerre. Az

$$(20) \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{y}_2 = \mathbf{v}_2, \mathbf{y}_3 = \mathbf{v}_3, \mathbf{y}_4 = \dot{\mathbf{v}}_1, \mathbf{y}_5 = \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{y}_6 = \dot{\mathbf{v}}_3, \mathbf{y}_7 = \ddot{\mathbf{v}}_1, \mathbf{y}_8 = \ddot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{y}_9 = \ddot{\mathbf{v}}_3,$$

új változók és az

$$(21) \quad \mathbf{y}_\varphi \quad (\varphi = 1,2,3), \quad \mathbf{y}_\beta \quad (\beta = 4,5,6), \quad \mathbf{y}_\psi \quad (\psi = 7,8,9)$$

vektorok bevezetésével a keresett egyenletrendszer

$$(22) \quad \dot{\mathbf{y}}_\varphi = \mathbf{y}_\beta,$$

$$(23) \quad \dot{\mathbf{y}}_\beta = \mathbf{y}_\psi,$$

$$(24) \quad \dot{\mathbf{y}}_\psi = F^1 \mathbf{y}_\varphi + F^2 \mathbf{y}_\beta + F^3 \mathbf{y}_\psi.$$

A stabilitási tulajdonságokat a (22), (23) és (24) egyenletek jobb oldalával definiált

$$\widehat{F}(\mathbf{y}_\varphi, \mathbf{y}_\beta, \mathbf{y}_\psi) := (\mathbf{y}_\varphi, \mathbf{y}_\beta, \mathbf{y}_\psi, F^1 \mathbf{y}_\varphi + F^2 \mathbf{y}_\beta + F^3 \mathbf{y}_\psi)$$

operátor sajátértékei határozzák meg. *Ljapunov* indirekt módszere szerint a  $\mathbf{0}$  megoldás

- aszimptotikusan stabil, ha az  $\widehat{F}$  operátor minden sajátértékének a valós része negatív;
- a stabilitás határán van, ha van egy olyan sajátérték, amelynek nulla a valós része és az összes többié negatív.

Az  $\widehat{F}$  karakterisztikus egyenlete

$$\begin{aligned}
(25) \quad \lambda \mathbf{y}_\varphi &= \mathbf{y}_\beta, \\
\lambda \mathbf{y}_\beta &= \mathbf{y}_\psi,
\end{aligned}$$

$$\lambda \mathbf{y}_\psi = F^1 \mathbf{y}_\varphi + F^2 \mathbf{y}_\beta + F^3 \mathbf{y}_\psi .$$

Helyettesítsük be (25) első két egyenletét a harmadikba

$$(26) \quad \lambda^3 \mathbf{y}_\varphi - \lambda^2 F^3 \mathbf{y}_\varphi - \lambda F^2 \mathbf{y}_\varphi - \lambda F^1 \mathbf{y}_\varphi = \mathbf{0} .$$

A stabilitási feltétel tehát:

$$\Re \lambda_i \leq 0$$

minden olyan  $\lambda_i$ -re, melyre (26) érvényes.

Egy dinamikai rendszer (így a (22), (23), (24) rendszer) tipikus stabilitásvesztéskor a stabilitás határán van, ha vagy

SB: egy valós sajátérték nulla  $\lambda_c = 0$ , vagy pedig

DB: egy komplex, illetve konjugált komplex  $\lambda_{c1}, \lambda_{c2}(= \bar{\lambda}_{c1})$  sajátérték pár valós része nulla,  $\Re \lambda_{c1} = 0, \Re \lambda_{c2} = 0$ ,

míg a többi sajátértékre  $\Re \lambda_i < 0, i \neq c$ , illetve  $i \neq c1, c2$ .

Tehát a stabilitásvesztés kétféle típusú lehet, vagy *statikus* (SB), vagy *dinamikus* (DB) bifurkáció [1], [2].

Az SB esetben (26)-nak kell legyen nulla sajátértéke:

$$\lambda_c = 0$$

azaz a statikus bifurkáció szükséges feltétele

$$(27) \quad F^1 \mathbf{y}_\varphi = \mathbf{0} .$$

Ezt az esetet „divergencia” instabilitásnak, illetve a lokalizáció kezdetének („onset of localization”) [9] szokták nevezni. Ekkor a (Ljapunov) stabilitás mellett a  $\mathbf{0}$  megoldás egyértelműsége is elvész, és attól különböző (nem-triviális) megoldások is jelentkezhetnek.

Dinamikus bifurkáció (DB) esetén a kritikus sajátértékek tiszta képzetesek

$$(28) \quad \lambda = i\omega, \quad (\omega \neq 0),$$

A (28)-at behelyettesítve (26)-ba a valós és a képzetes részekre kapott egyenletekből

$$(29) \quad -\omega^2 F^3 \mathbf{y}_\varphi - F^1 \mathbf{y}_\varphi = \mathbf{0},$$

$$(30) \quad \omega^2 \mathbf{y}_\varphi + F^2 \mathbf{y}_\varphi = \mathbf{0} .$$

A (30)-ból



$$\omega^2 \mathbf{y}_\varphi = -F^2 \mathbf{y}_\varphi$$

amit (29)-be helyettesítve adódik a dinamikus bifurkáció szükséges feltétele:

$$(31) \quad F^3(F^2 \mathbf{y}_\varphi) + F^1 \mathbf{y}_\varphi = \mathbf{0}.$$

Az SB és DB esetek közötti legfontosabb különbség az, hogy a DB esetben a megoldás létezése és egyértelmősége megmarad miközben a Ljapunov stabilitás elvész.

Mivel az összes  $y_\varphi$  függvény ki kell elégítse a homogén peremfeltételeket, a (27) és (31) bifurkációs feltételek vizsgálata parciális differenciálegyenletek, illetve a hozzájuk kapcsolódó peremérték feladatok megoldását teszi szükségessé. Az általános esetben ez nem végezhető el analitikusan. Helyette kétféle egyszerűsítést alkalmazhatunk. Egyrészt végezhetjük a vizsgálatokat egytengelyű esetben, amikor az analitikus megoldás egyszerűen kiszámítható. Másrészt, megmaradva a többtengelyű feladatnál, a megoldásokat bizonyos speciális (általában harmonikus) függvények körében keresve, a (27) és (31) instabilitási feltételek algebrai egyenletekké egyszerűsödnek. Ezt a második módszert a szakirodalomban harmonikus perturbációnak nevezik.

#### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az OTKA támogatta a K60422 téma keretében.

#### IRODALOM

1. BÉDA, P.B., 1999, Gradient effects and dynamical systems in solid mechanics, ZAMM, 79, pp. S445–S446.
2. BÉDA, P.B., 1999, On rate and gradient dependence of solids as dynamical systems, Arch. Mech., 51, (3-4), pp. 229–241.
3. AN, L., 1991, The genericity of flutter ill-posedness in 3D elastic-plastic models, Quart. Appl. Math. 52, pp. 343–362.
4. AN, L., 1993, Loss of hyperbolicity in elastic-plastic material at finite strain, SIAM Journal of Applied Mathematics, 53, pp. 621–654.
5. AN, L., SCHAEFFER, D.G., 1992, The flutter instability in granular flow, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 40, pp. 683–698.
6. BIGONI, D., WILLIS, J.R., 1994, A dynamical interpretation of flutter instability, in: Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks, (Eds.: R. Chambon, J. Desrues and I. Vardoulakis) Balkema, Rotterdam, pp. 51–58.
7. BÉDA, GY. KOZÁK, I, VERHÁS, J., 1986. Kontinuummechanika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
8. NEEDLEMAN, A., TVERGAARD, V., 1992, Analyses of plastic flow localization in metals, Appl. Mech. Rev. 45, Part 2, pp. S3-S19.

9. RICE, J.R., 1976, The localization of plastic deformation, in: *Theoretical and Applied Mechanics*, (Ed.: W.T. Koiter), North-Holland Publ. Amsterdam, pp. 207–220.
10. VARDOULAKIS, I., 1994, Potentials and limitations of softening models in geomechanics, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 13, pp. 195–226.
11. WIGGINS, S., 1990, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer, New York.
12. ZBIB, H.M., AIFANTIS, E.C., 1988, On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation, I, *Res. Mechanica*, 23, pp. 261–277.
13. ZBIB, H.M., AIFANTIS, E.C., 1991, On the structure and width of shear bands in finite elastoplastic deformations, in: *Anisotropy and Localization of Plastic Deformations*, (Eds.: J-P. Boehler, A.S. Khan), Elsevier, New York, pp. 99–103.
14. ARNOLD, V.I. 1985. *A mechanika matematikai módszerei*, Műszaki Kiadó, Budapest
15. ARNOLD, V.I. 1987. *Közönséges differenciálegyenletek*, Műszaki Kiadó, Budapest
16. ARNOLD, V.I. 1988. *A differenciálegyenletek elméletének geometriai módszerei*, Műszaki Kiadó, Budapest
17. ARNOLD, V.I., 1983, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer, New York.
18. BÉDA, GY. 1987, Possible constitutive equations of the moving plastic body, *Advances in Mech.* 10, pp. 65-87.
19. BÉDA, GY., 1997, Constitutive equations and nonlinear waves, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl.*, 30, pp. 397–407.
20. BENALLAL, A., COMI, C., 2002, Material instabilities in inelastic saturated porous media under dynamic loadings, *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 3693–3716.
21. BIGONI, D. 1995. On flutter instability in elastoplastic constitutive models, *International Journal of Solids and Structures* 32 3167–3189
22. BIGONI, D., HUECKEL, T., 1991, Uniqueness and localization - I. Associative and nonassociative elastoplasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 28, pp. 197–213.
23. BIGONI, D., LORET, B. 1990, Effects of elastic anisotropy on strain localization and flutter instability in plastic solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47 1409-1436
24. BIGONI, D., ZACCARIA, D. 1994, On the eigenvalues of the acoustic tensor in elastoplasticity, *Eur. J. Mech. A/Solids* 13 621–638
25. BISHOP, J.F.W., HILL, R., 1951. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. *Philos. J.* 42, 414–427.
26. BOLOTIN, V.V. 1963. *Nonconservative problems of the theory of elastic stability*, Pergamon Press, New York
27. DE BORST, R., 1986, *Non-linear analysis of frictional materials*, Dissertation, Delft University of Technology, Delft.

28. CHOW, S.N., J. HALE, J., 1982, *The methods of bifurcation theory*, Springer, New York.
29. DE BORST, R., SLUYS, L.J., MÜHLHAUS, H.-B., PAMIN, J., 1993, Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation, *Engineering Computations*, 10, pp. 99–121.
30. DE BORST R., MÜHLHAUS H.B., 1992, Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 35 521-539.
31. DESRUES, J., CHAMBON, R., 2002, Shear band analysis and shear moduli calibration, *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 3757–3776.
32. DOBOVSEK, I., 1994, Adiabatic material instabilities in rate-independent solids, *Arch. Mech.* 46, pp. 893–936.
33. DOBOVSEK, I., MORAN, B., 1996, Material instabilities in rate dependent solids, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 15, pp. 267–294.
34. DRUCKER, D.C., 1951. A more fundamental approach to stress-strain relations. In: *Proceedings of the First US Nat. Cong. Appl. Mech.*, pp. 487-491.
35. DRUCKER, D.C., 1956. On uniqueness in the theory of plasticity. *Quart. Appl. Math.* 14, 35-42.
36. DRUCKER, D.C., 1959. A definition of stable inelastic material. *J. Appl. Mech.* 26, 101-106.
37. ERINGEN, C., 1975, *Continuum physics, Vol. II.* Academic Press, New York.
38. GANTMACHER, F., 1970, *Lectures in analytical mechanics*, Mir Publishers, Moscow
39. GOLUBITSKY, M., SCHAEFFER, D.G., 1985, *Singularities and groups in bifurcation theory*, Springer, New York.
40. GURTIN, M.E., 1960, The linear theory of elasticity, in: *Handbuch der Physik, Vol. VIa/2.* (Ed.: S. Flügge), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
41. HADAMARD, J., 1903, *Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique*, Librairie Scientifique A. Hermann, Paris.
42. HILL, R., 1958, A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6, pp. 236–249.
43. HILL, R., 1962, Accelerations waves in solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10, pp. 1–16.
44. LORET, B., HARIRECHE, O., 1991, Acceleration waves, flutter instabilities and stationary discontinuities in inelastic porous media, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39, pp. 569–606.
45. LORET, B., MARTINS, J.A.C., SIMÕES, F.M.F., 1995, Surface boundary conditions trigger flutter instability in non-associative elastic-plastic solids, *International Journal of Solids and Structures* 32 2155–2190
46. LUBLINER J., 1990. *Plasticity theory*, Macmillan Publ. Comp. New York
47. MANDEL, J., 1964. Conditions de stabilite et postulat de Drucker. In: *Proceedings, IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mechanics Grenoble*, pp. 57-58.

48. MARSDEN, J.E., HUGHES, T.J.R., 1983, *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
49. MARSDEN, J.E., MCCracken, M., 1976, *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer, New York.
50. MÜHLHAUS, H.B., AIFANTIS E.C., 1991, A variational principle for gradient plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 28, pp. 845–858.
51. MÜHLHAUS, H.-B., DUFOUR, F., MORESI, L., HOBBS B., 2002, A director theory for visco-elastic folding instabilities in multilayered rock, *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 3675–3691.
52. NIELSEN K, SCHREYER H.L. 1993, Bifurcations in elastic-plastic materials. *International Journal of Solids and Structures*;30, pp. 521–44.
53. NGUYEN, Q.S., 1993, *Mécanique des solides et des structures. Stabilité des structures élastiques*, École Polytechnique, Paliseau.
54. PETRYK, H., 1982. A consistent energy approach to determining stability of plastic deformation processes. In: Schroeder, F.H. (Ed.), *Stability in the Mechanics of Continua*, Proceeding of the IUTAM Symposium. Numbrecht 1981. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 262–272.
55. PETRYK, H., 1985, On energy criteria of plastic instability In: *Plastic Instability*, Proc. Considere Memorial. Ecole Nat. Ponts Chauss., Paris, pp. 215–226
56. PETRYK, H., 1991, The energy criteria of instability in time-independent inelastic solids. *Arch. Mech.* 43, 519–545.
57. PETRYK, H., 1992, Material instability and strain-rate discontinuities in incrementally nonlinear continua. *J. Mech. Phys. Solids* 40, 1227–1250.
58. PETRYK, H., 1997, Instability of plastic deformation processes. In: Tatsumi, T et al. (Eds.), *Theoretical and Applied Mechanics 1996*, Proceedings of the XIXth IUTAM Congress, Kyoto. Elsevier, Amsterdam, pp. 497–516.
59. PETRYK, H., 1997, Plastic instability: criteria and computational approaches. *Arch. Comp. Meth. Eng.* 4, 111–151.
60. PETRYK, H., 1998. Macroscopic rate-variables in solids undergoing phase transformation. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 873–894.
61. PETRYK, H., THERMANN, K., 1996. Post-critical plastic deformation of biaxially stretched sheets. *Int. J. Solids Struct.* 33, 689–705.
62. PETRYK, H., THERMANN, K., 1997. A yield-vertex modification of two-surface models in plasticity. *Arch. Mech.* 49, 847–863.
63. PETRYK, H., THERMANN, K., 2000. Post-critical deformation pattern in plane strain plastic flow with yield-surface vertex effect. *Int. J. Mech. Sci.* 42, 2133–2146.
64. PETRYK, H., THERMANN, K., 2002, Post-critical plastic deformation in incrementally nonlinear materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50, pp. 925 – 954.
65. RUDNICKI, J.W., RICE, J.R. 1975, Condition for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *Journal of the Mech. and Phys. of Solids*, 23. 371-395.

66. SLUYS, L.J., DE BORST, R., 1992, Wave propagation and localization in a rate-dependent cracked medium – model formulation and one-dimensional examples, *International Journal of Solids and Structures*, 29, pp. 2945–2958.
67. STÖREN, S., RICE, J.R. 1975, Localized necking in thin sheets, *Journal of the Mech. and Phys. of Solids*, 23. 421–441.
68. ROUCHE, N., HABETS, P., LALOY, M., 1977, *Stability theory by Liapunov's direct method*, Springer, New York.
69. RUDNICKI, J.W., 2002, Conditions for compaction and shear bands in a transversely isotropic material, *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 3741-3756.
70. TEMAM, R., 1997, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer, New York
71. THOMAS T.Y., 1961, *Plastic Flow and Fracture in Solids*, Academic Press, New York, N.Y.,
72. TROGER, H., STEINDL, A., 1990, *Nonlinear stability and bifurcation theory, An introduction for scientists and engineers*, Springer-Verlag, Wien, New York.
73. TRUESDELL, C., 1961, General and exact theory of waves in finite elastic strain, *Arch. Rational Mech. Anal.* 8, pp. 263–296.
74. ZHANG, H.W., SCHREFLER, B.A., 2000, Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation analysis of saturated and partially saturated porous media: one dimensional model, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 19, pp. 503–524.

# A HARMADFOKÚ, VÉGES DEFORMÁCIÓS RUGALMASSÁGTAN TERMODINAMIKAI KONZISZTENCIÁJÁRÓL

*Ván Péter*

KFKI, RMKI, ELMÉLETI FIZIKA FŐOSZTÁLY, BUDAPEST,  
BME, ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST,  
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

*Ebben az írásban a viszkoelasztikus anyagok mozgásgradiensben másodrendűen nemlokális anyagtörvényeire vonatkozó termodinamikai követelményeket vizsgáljuk. A LIU-eljárás alkalmazásával megmutatjuk, hogy a termodinamikai feltételekkel kompatibilis egy olyan anyagtörvény, amely tartalmazza a mozgásgradiens harmadik és a feszültség második térderiváltját. Végül izotrop szilárd testekre kiszámítjuk a longitudinális síkhullámok diszperziós relációját.*

## 1. BEVEZETÉS

A termodinamikai követelmények a kontinuummechanika minden elméletében alapvetőek. A CLAUSIUS–DUHEM-egyenlőtlenség, a nemnegatív entrópiaprodukció klasszikus formája [1, 2] például kizárja a feszültség mozgásgradiens térderiváltjától való függését, azaz, a TRUESDELL és NOLL által bevezetett terminológiával, az egynél magasabb fokú rugalmasságtant és képlékenységtant. Ez GURTIN híres eredménye 1965-ből [3]. Ha csupán mechanikai oldalról nézzük, akkor ez a megszorítás nem igazán érthető, főleg ha a termodinamikai feltételeknek érvényességét kezdjük feszegetni. Éppen ezért több kísérlet is történt ennek az eredménynek a meghaladására [4, 5]. Végző soron ennek következtében, a termodinamikai tiltás megkerülésére, a magasabb fokú rugalmasságtani és képlékenységi elméletek fellazulnak és új fogalmakat kénytelenek bevezetni, azért, hogy megértsék bizonyos tapasztalati úton javasolt anyagtörvények sikeres használhatóságának okait [6, 7].

Ebben az írásban megmutatjuk, hogy a GURTIN által használt és széles körben elfogadott feltételek megfelelő általánosításával a véges deformációs magasabbfokú rugalmasságtan és viszkoelaszticitás nem mond ellent a második főtételeknek. Matematikai módszerekkel megadunk egy olyan feszültség-alakváltozás anyagtörvényt, amely kompatibilis a

szigorú termodinamikai követelményekkel. Módszerünk három lényeges ponton általánosítja a GURTIN által elfogadott klasszikus keretfeltevéseket:

- az entrópia áramsűrűségét konstitutív, meghatározandó anyagfüggvénynek tekintjük,
- az alapváltozók egynél magasabb rendű térderiváltjait tartalmazó konstitutív állapotterekben a mérlegek és egyéb kinematikai kényszerek gradiense további kényszereket jelent az entrópiatermelés egyenlőtlenségéhez,
- az anyagi objektivitás NOLL-féle megfogalmazásának általánosítása lehetővé teszi a konstitutív állapotter változóinak rugalmasabb megválasztását.

Az *entrópia áramsűrűségét* a GIBBS–DUHEM-egyenlőtlenség, azaz az entrópiamérleg klasszikus formája meghatározott formában posztulálja:

$$J^i := q^i/T. \quad (1)$$

Azaz az entrópia  $J^i$  konduktív áramsűrűségét megkapjuk, ha a belső energia  $q^i$  konduktív áramsűrűségét, a hőáramot elosztjuk a  $T$  hőmérséklettel [1]. Ez a feltevés azonban általában nem igaz, például keverékeknél az entrópia áramsűrűsége tartalmazza a diffúziós áramsűrűségeket is, ezért az entrópia áramsűrűségét célszerűbb nem előre definiálni, hanem meghatározandó anyagfüggvénynek tekinteni. Ez a GIBBS–DUHEM-egyenlőtlenség INGO MÜLLERTŐL származó fontos általánosítása [8]. Bebizonyítható, hogy elsőrendűen gyengén nemlokális termodinamikai elméleteknél (vagyis amikor a konstitutív állapotter csak elsőrendű térderiváltjait tartalmazza az alapváltozóknak), és ha minden fejlődési egyenletünk mérleg formájú, akkor a termodinamika második főtétele miatt az entrópia árama a következő formájú lesz

$$J^i = \sum_{A=1}^n \frac{\partial s}{\partial a_A} j_A^i.$$

Itt  $a_A$  az  $A$ -edik fajlagos extenzív termodinamikai mennyiség,  $j_A^i$  ennek konduktív áramsűrűsége,  $s$  a fajlagos entrópia,  $n$  pedig az extenzív termodinamikai mennyiségek, illetve a rájuk vonatkozó mérlegeknek a száma. Tehát a fenti feltételekkel meghatározott irreverzibilis termodinamikában az entrópiaáramot az extenzívek konduktív áramainak és a megfelelő intenzív mennyiségeknek a szorzatösszegeként kapjuk [9]. A fenti formából tiszta hővezetés, vagy keverékek esetén az entrópiaáram szokásos formái adódnak. Például elsőrendűen gyengén nemlokális termorugalmasságtan speciális esetére visszakapjuk (1)-et [10]. Ez érthetővé teszi, hogy a mechanikán belül miért tartja magát az eredeti definíció, habár a konstitutív entrópiaáram széleskörűen elfogadott és használt ettől sokkal általánosabban is [11, 12, 2].

A második főtétel követelményeit a LIU-eljárás segítségével fogjuk érvényesíteni. Ez a módszer FARKAS GYULA egyenlőtlenségi tételein alapul és az entrópiamérleg egyenlőtlenségéhez a további kinematikai követelmények és mérlegek differenciálegyenleteit szorzó faktorok, úgynevezett LAGRANGE–FARKAS-multiplikátorok segítségével csatolja [13]. Alkalmazása gyengén nemlokális állapotterek esetén további körültekintést igényel, mert ekkor a kényszerek deriváltjai is további kényszereket jelenthetnek [14]. Ez a leglényegesebb pont, ami elkerülte GURTIN figyelmét [3]. A módszer általános, a nemegyensúlyi termodinamika alkalmazhatóságát jelentősen kiterjeszti és a második főtétel szerepének feltárásával a fizika különféle területein már eddig is számos meglepő eredményre vezetett. Ilyenek például a nemlokális hővezetés Guyer-Krumhansl-egyenletének származtatása és általánosítása [15, 16], sűrűségben másodfokú folyadékok esetén a Schrödinger-Madelung-egyenlet levezetése [17], a kétfázisú fázisszeparált (pl. szemcsés) anyagokban a nyíró instabilitások megjelenésének felderítése [18, 19] és a belső változókra vonatkozó dinamikai egyenletek általános szerkezetének levezetése [20, 21, 22].

A további kényszerek — további LAGRANGE–FARKAS-szorzókkal — viszont az eredeti kényszer nélküli esethez képest általánosabb konstitutív egyenletekre vezetnek [23]. Végző soron ennek a következménye itt következő fő eredményünk, azaz hogy a feszültség függhet a mozgásgradiens térderiváltjaitól. Ehhez nem szükséges előre bevezetnünk sem magasabbrendű (hiper)feszültségeket, sem más további fizikai fogalmakat, sőt a végén látni fogjuk, eredményeink egy része visszaadja a magasabbrendű feszültségek segítségével kapott összefüggéseket.

A gyengén nemlokális rugalmasságtanban a nemlokalitás fokát TRUESDELL és NOLL eredeti definíciója szerint ([1], 63.o.) a feszültségre vonatkozó anyagfüggvényben megjelenő legmagasabb rendű mozgásfüggvény térderiválnak a rendje határozza meg. Ebben az írásban egyik alapváltozónak a mozgásgradienst fogjuk tekinteni, és a mozgásgradiensben maximum második térderiváltakat tartalmazhatnak az anyagfüggvények. Tehát az elmélet harmadfokú, de mozgásgradiensben másodrendűen gyengén nemlokális.

Megmutatjuk, hogy a termodinamikailag megengedett kapcsolatot nem anyagfüggvények jelentik, hanem általánosabban, differenciálegyenletekkel meghatározott anyag-törvények, amiknek két tulajdonságát emeljük ki:

- tartalmazzák a mozgásgradiens második deriváltjait, anélkül azonban, hogy ehhez szükség lenne a hiperfeszültségre független fizikai fogalomként,
- már a nemdisszipatív feszültség-mozgásgradiens anyagtörvényben is megjelenik a *feszültség* második térderiváltja, AIFANTIS ad hoc javaslatához hasonlóan (lásd [24] és a hivatkozásokat benne).

Az anyagfüggvényt általánosító differenciálegyenlet fizikai szerepének szemlélteté-



séhez levezetjük a longitudinális síkhullámokra vonatkozó diszperziós relációt.

## 2. KONTINUUMOK A PIOLA-KIRCHHOFF-RENDSZERBEN

A továbbiakban minden fizikai mennyiségünk anyagi mennyiség amit a referencia-konfiguráción értelmezünk, illetve a számításokat anyagi mérlegekre alpozzuk. Ezt kontinuumok leírásának PIOLA-KIRCHHOFF-rendszere, korábban részletesen tárgyaltuk ([25], 20-30 oldal). Azonban az előző tárgyaláshoz képest indexes jelölésmódot vezetünk be a magasabb mint másodrendű tenzorok miatt. A szubsztanciális deriváltat továbbra is ponttal jelöljük, de az anyagi térderiváltat  $\partial_i$ -vel, ahol  $i \in \{1,2,3\}$  (ennek jele  $\nabla_{\mathbf{R}}$  volt [25]-ben), a magasabb deriváltakat ismételt indexekkel  $\partial_i \partial_j = \partial_{ij}$ . Ha egy kezdeti  $t_0$  időpontban  $R^j$  helyen található pont  $t$  időpontbeli helyét  $\chi^i(R^j, t)$  mozgásfüggvénnyel adjuk meg, akkor ennek anyagi térderiváltjaként kapjuk az  $F_j^i = \partial_j \chi^i$  mozgásgradienst (ennek jele  $\mathbf{H}$  volt [25]-ben). A kontravariáns komponenseket felső, a kovariáns komponenseket alsó indexekkel, a kontrakciót pedig azonos alsó és felső indexek jelöljük az EINSTEIN-féle összegzési szabály szerint. Az indexekre bátran gondolhatunk úgy, mint amik DESCARTES-koordinátarendszerbeli vektor komponenseket jelölnek, de megjegyzendő, hogy ettől általánosabban a tenzori mennyiségek típusára és a velük történő műveletekre utalnak kényelmes jelölésként, azaz a koordinátázástól független, 'absztrakt indexként' is értelmezhetőek [26].

A kinematikai megfontolásokban, azaz, a mechanikai elmélet *alpváltozóinak* kijelölésekor egy kontinuumelméletben figyelembe kell venni a fizikai törvények és anyag-törvények függetlenségét a vonatkoztatási rendszertől, azaz az *objektivitás* követelményét. A hagyományos elképzelés szerint a mezők visszahúzása a térbeli helyzetről a referencia-konfigurációra biztosítja a tárgyalás objektivitását, amennyiben a konstitutív állapototteret is objektív függvények feszítik ki, azaz az anyagfüggvények objektív mennyiségektől függenek. Az objektivitás NOLL által megadott matematikai megfogalmazásának, azaz az objektív mennyiségek szokásos meghatározásának helyessége azonban kérdéses [27, 28, 29]. Ezért egy pontos téridő fogalmakon alapuló általánosítását javasoltunk, amelynek alapja egy négydimenziós fogalmakra épített nemrelativisztikus tér-idő tárgyalás [30, 31, 32]. Ebben a munkában nem használjuk ki ennek a javaslatnak a teljes általánosságát, inkább egy egyszerűbb megoldást választunk és a négydimenziós tárgyalás helyett csak a következményeit alkalmazzuk. Mindenekelőtt kényelmes a referencia-konfiguráción, az ún. PIOLA-KIRCHHOFF-rendszerben dolgoznunk, az összes mennyiséget és a mérlegeket is ott értelmezve ([6, 33] hasonlóan járnak el). Az első PIOLA-KIRCHHOFF-feszültséget kontravariáns tenzornak fogjuk jelölni. Ahogy az előbb már említettük, ha a konstitutív függvények változóinak NOLL-objektív fizikai mennyiségeket tekintenénk (pl. a jobb CAUCHY-GREEN-deformációt), akkor ezzel az anyagi objek-

tivitás szokott követelményeit ki tudnánk elégíteni. A fent említett általánosabb objektivitás azonban megengedi, hogy a sebességet és a mozgásgradienst is a konstitutív állapotter elemeinek tekintsük. Ugyanis a sebesség és a mozgásgradiens együttesen egyetlen fizikai mennyiséget, egy objektív vegyes négyestenzor részeit alkotják [32]. Ezen kívül a teljes energiát fogjuk még a változóként bevezetni.

A harmadfokú rugalmasságtanra vonatkozó termodinamikai feltételek tárgyalásához a *konstitutív állapotteret* tehát a következő referencia függvények feszítik ki  $(v^i, \partial_j v^i, \partial_{jk} v^i, F_j^i, \partial_k F_j^i, \partial_{kl} F_j^i, e, \partial_i e)$ . Itt  $v^i$  a sebesség, az  $F_j^i$  mozgásgradiens és az  $e$  fajlagos teljes energia is anyagi függvények. A konstitutív állapotter alapján az elmélet másodrendűen gyengén nemlokális a sebességben és a mozgásgradiensben, és elsőrendűen gyengén nemlokális az energia tekintetében. A teljes energia szerepeltetése alapváltozóként egyrészt kényelmes számítási szempontból, másrészt fontosnak érezzük megmutatni, hogy a belső energia bevezethető a tárgyalás végén. Látni fogjuk, hogy az energia- és impulzummérlegeket átfuttatva a LIU-eljáráson, és a belső energiát csak a számításaink végén felhasználva és a kapott anyagtörvényt a lokális változókra specializálva, a végeredmény visszaadja az ismert feszültség-deformáció anyagfüggvényeket. Vagyis mostani tárgyalásunk a lokális esetben ekvivalens a belső energiára alapozottal. Előnye, hogy kiemeli a szokásos tárgyalásmód feltevéseit, ráadásul általánosabb a megszokottnál: sikerrel alkalmaztuk relativisztikus folyadékokra, ahol a belső energia fogalmát tudtuk megsejteni vele [34].

Ezek után az entrópiamérleg egyenlőtlenségéhez öt egyenlőséget vezetünk be kényszerfeltételként. Egyrészt a jól ismert kinematikai kompatibilitási feltételt a sebesség és a mozgásgradiens között:

$$\dot{F}_j^i - \partial_j v^i = 0_j^i. \quad (2)$$

Másrészt az impulzummérleget, azaz

$$\rho_0 \dot{v}^i - \partial_j T^{ij} = 0^i, \quad (3)$$

ahol  $\rho_0$  az anyagi sűrűség, és  $T^{ij}$  az első PIOLA-KIRCHHOFF-feszültség, amit tenzorként vezetünk be. A teljes energia megmaradását kifejező mérleg

$$\rho_0 \dot{e} + \partial_i q^i = 0, \quad (4)$$

ahol  $q^i$  a teljes energia áramsűrűsége. Ezenkívül, mivel a konstitutív állapotterünk másodrendűen gyengén nemlokális, ezért az (2) kinematikai reláció és a (3) impulzummérleg gradiense is kényszerek, mert ezek az egyenletek is a konstitutív állapotter elemei közötti kapcsolatot írják le [14, 35]:

$$\partial_k F_j^i - \partial_{kj} v^i = 0_{jk}^i, \quad (5)$$

$$\rho_0 \partial_j \dot{v}^i + \partial_{jk} T^{ik} = 0_j^i. \quad (6)$$

Az energiamérleg gradiense nem ad további kényszerfeltételt, mert a konstitutív állapottér az energiában elsőrendűen gyengén nemlokális. Az entrópia egyenlőtlenség pedig azt követeli meg, hogy

$$\rho_0 \dot{s} + \partial_i J^i \geq 0, \quad (7)$$

ahol  $s$  a fajlagos entrópia és  $J^i$  a konduktív áramsűrűsége. A továbbiakban azt keressük, hogy az egyenlőtlenség milyen feltételeket követel meg a  $T^{ij}$ ,  $q^i$ ,  $J^i$  konstitutív, anyagi mennyiségeinktől, ha a fajlagos entrópiát tekintjük az alapvető konstitutív mennyiségnek. Fontos észrevennünk, hogy az impulzusról deriváltja kiterjeszti a folyamatirányok terét, amit eredetileg a konstitutív állapottér változóinak térderiváltjai adtak meg.

Bevezetve a  $\Lambda_i^j$ ,  $\lambda_i$ ,  $\kappa$ ,  $\Lambda_i^{jk}$ ,  $\lambda_i^j$  LAGRANGE-FARKAS-SZORZÓKAT az (2)-(6) kényszerekhez a LIU-eljárásnak a következő egyenlőtlenség szolgál kiindulópontul:

$$\begin{aligned} 0 \leq & \rho_0 \dot{s} + \partial_i J^i - \Lambda_i^j (\dot{F}_j^i - \partial_j v^i) - \lambda_i (\rho_0 \dot{v}^i - \partial_j T^{ij}) - \kappa (\rho_0 \dot{e} + \partial_i w^i) - \\ & \Lambda_i^{jk} (\partial_k F_j^i - \partial_{kj} v^i) - \lambda_i^j (\rho_0 \partial_j \dot{v}^i + \partial_{kj} T^{ik}) = \\ & \rho_0 \frac{\partial s}{\partial v^i} \dot{v}^i + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_j v^i} \partial_j \dot{v}^i + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_{jk} v^i} \partial_{jk} \dot{v}^i + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial F_j^i} \dot{F}_j^i + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_k F_j^i} \partial_k \dot{F}_j^i + \\ & \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_{kl} F_j^i} \partial_{kl} \dot{F}_j^i + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_i e} \partial_i \dot{e} + \\ & \frac{\partial J^j}{\partial v^i} \partial_j v^i + \frac{\partial J^k}{\partial \partial_j v^i} \partial_{kj} v^i + \frac{\partial J^l}{\partial \partial_{kj} v^i} \partial_{lkj} v^i + \frac{\partial J^k}{\partial F_j^i} \partial_k F_j^i + \frac{\partial J^l}{\partial \partial_k F_j^i} \partial_{lk} F_j^i + \\ & \frac{\partial J^m}{\partial \partial_{lk} F_j^i} \partial_{mlk} F_j^i + \frac{\partial J^i}{\partial e} \partial_i e + \frac{\partial J^j}{\partial \partial_i e} \partial_{ji} e - \\ & \lambda \left( \rho_0 \dot{e} + \frac{\partial q^j}{\partial v^i} \partial_j v^i + \frac{\partial q^k}{\partial \partial_j v^i} \partial_{kj} v^i + \frac{\partial q^l}{\partial \partial_{kj} v^i} \partial_{lkj} v^i + \frac{\partial q^k}{\partial F_j^i} \partial_k F_j^i + \frac{\partial q^l}{\partial \partial_k F_j^i} \partial_{lk} F_j^i + \right. \\ & \left. \frac{\partial q^m}{\partial \partial_{lk} F_j^i} \partial_{mlk} F_j^i + \frac{\partial q^i}{\partial e} \partial_i e + \frac{\partial q^j}{\partial \partial_i e} \partial_{ji} e \right) - \\ & \lambda_r \left( \rho_0 \dot{v}^i - \frac{\partial T^{rj}}{\partial v^i} \partial_j v^i - \frac{\partial T^{rk}}{\partial \partial_j v^i} \partial_{kj} v^i - \frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_{kj} v^i} \partial_{lkj} v^i - \frac{\partial T^{rk}}{\partial F_j^i} \partial_k F_j^i - \frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_k F_j^i} \partial_{lk} F_j^i - \right. \\ & \left. \frac{\partial T^{rm}}{\partial \partial_{lk} F_j^i} \partial_{mlk} F_j^i - \frac{\partial T^{ri}}{\partial e} \partial_i e - \frac{\partial T^{rj}}{\partial \partial_i e} \partial_{ji} e \right) - \Lambda_i^j (\dot{F}_j^i - \partial_j v^i) - \\ & \lambda_r^s \left( \rho_0 \partial_s \dot{v}^r - \frac{\partial T^{rj}}{\partial v^i} \partial_{sj} v^i - \partial_j v^i \partial_s \left[ \frac{\partial T^{rj}}{\partial v^i} \right] - \frac{\partial T^{rk}}{\partial \partial_j v^i} \partial_{skj} v^i - \partial_{kj} v^i \partial_s \left[ \frac{\partial T^{rk}}{\partial \partial_j v^i} \right] - \right. \\ & \left. \frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_{kj} v^i} \partial_{slkj} v^i - \partial_{lkj} v^i \partial_s \left[ \frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_{kj} v^i} \right] - \frac{\partial T^{rk}}{\partial F_j^i} \partial_{sk} F_j^i - \partial_k F_j^i \partial_s \left[ \frac{\partial T^{rk}}{\partial F_j^i} \right] - \right. \\ & \left. \frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_k F_j^i} \partial_{slk} F_j^i - \partial_{lk} F_j^i \partial_s \left[ \frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_k F_j^i} \right] - \frac{\partial T^{rm}}{\partial \partial_{lk} F_j^i} \partial_{smlk} F_j^i - \partial_{mlk} F_j^i \partial_s \left[ \frac{\partial T^{rm}}{\partial \partial_{lk} F_j^i} \right] - \right. \\ & \left. \frac{\partial T^{ri}}{\partial e} \partial_{si} e - \partial_i e \partial_s \left[ \frac{\partial T^{ri}}{\partial e} \right] - \frac{\partial T^{rj}}{\partial \partial_i e} \partial_{sji} e - \partial_{ji} e \partial_s \left[ \frac{\partial T^{rj}}{\partial \partial_i e} \right] \right) - \Lambda_i^{jk} (\partial_k \dot{F}_j^i - \partial_{kj} v^i). \quad (8) \end{aligned}$$

A LIU-egyenleteket a konstitutív állapot térbe nem tartozó magasabbrendű deriváltak együttthatóiként kapjuk. Az időderiváltat is tartalmazó együttthatók a következő egyenlőségeket eredményezik

$$\dot{v}^i : \rho_0 \left( \frac{\partial s}{\partial v^i} - \lambda_i \right) = 0, \quad (9)$$

$$\partial_j \dot{v}^i : \rho_0 \left( \frac{\partial s}{\partial \partial_j v^i} - \lambda_i^j \right) = 0, \quad (10)$$

$$\partial_{kj} \dot{v}^i : \frac{\partial s}{\partial \partial_{kj} v^i} = 0, \quad (11)$$

$$\dot{F}_j^i : \rho_0 \left( \frac{\partial s}{\partial F_j^i} - \Lambda_i^j \right) = 0, \quad (12)$$

$$\partial_k \dot{F}_j^i : \rho_0 \left( \frac{\partial s}{\partial \partial_k F_j^i} - \Lambda_i^{jk} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\partial_{kl} \dot{F}_j^i : \frac{\partial s}{\partial \partial_{kl} F_j^i} = 0, \quad (14)$$

$$\dot{e} : \rho_0 \left( \frac{\partial s}{\partial e} - \lambda \right) = 0, \quad (15)$$

$$\partial_i \dot{e} : \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_i e} = 0. \quad (16)$$

Ezért a LAGRANGE–FARKAS-szorzókat az entrópia deriváltjai meghatározzák, és ezen kívül a fajlagos entrópia nem függ a konstitutív állapot tér legmagasabb rendű deriváltjaitól:  $s = s(v^i, \partial_j v^i, F_j^i, \partial_k F_j^i, e)$ .

A legmagasabb rendű térderiváltak együttthatóiként adódó Liu-egyenletek a következők:

$$\partial_{rlkj} v^i : \frac{\partial s}{\partial \partial_r v^s} \frac{\partial T^{sl}}{\partial \partial_{kj} v^i} = 0, \quad (17)$$

$$\partial_{rmlk} F_j^i : \frac{\partial s}{\partial \partial_r v^s} \frac{\partial T^{sm}}{\partial \partial_{lk} F_j^i} = 0, \quad (18)$$

$$\partial_{kji} e : \frac{\partial s}{\partial \partial_k v^s} \frac{\partial T^{sj}}{\partial \partial_i e} = 0. \quad (19)$$

Ezeknek az egyenleteknek az a megoldása, hogy a feszültség sem függ a konstitutív állapot tér legmagasabb rendű deriváltjaitól, azaz  $T^{mn} = T^{mn}(v^i, \partial_j v^i, F_j^i, \partial_k F_j^i, e)$ . Itt fontos leszögeznünk, hogy nem törekszünk a (17)–(19) egyenletek legáltalánosabb megoldására (ilyet például LIU csinált egy egyszerűbb esetben [10]), csak meg szeretnénk határozni egy megoldást, amely nem mond ellent a termodinamikai követelményeknek. Valójában a fenti egyenlőségek akkor is teljesülnek, ha a szorzótényező tenzorok ortogo-

nálisak. (17)-(19)-at a megmaradt LIU-egyenletekre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\partial_{lkj}v^i : \frac{\partial J^l}{\partial \partial_{jk}v^i} + \frac{\partial s}{\partial \partial_l v^r} \frac{\partial T^{kr}}{\partial \partial_j v^i} - \frac{\partial s}{\partial e} \frac{\partial q^l}{\partial \partial_{jk}v^i} = 0, \quad (20)$$

$$\partial_{mlk}F_j^i : \frac{\partial J^m}{\partial \partial_{lk}F_j^i} + \frac{\partial s}{\partial \partial_m v^r} \frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_k F_j^i} - \frac{\partial s}{\partial e} \frac{\partial q^m}{\partial \partial_{lk}F_j^i} = 0, \quad (21)$$

$$\partial_{ij}e : \frac{\partial J^j}{\partial \partial_i e} + \frac{\partial s}{\partial \partial_j v^r} \frac{\partial T^{ri}}{\partial e} - \frac{\partial s}{\partial e} \frac{\partial q^j}{\partial \partial_i e} = 0. \quad (22)$$

Ezeknek megoldása az entrópia áramsűrűségét a következő formára redukálja:

$$J^i = \frac{\partial s}{\partial e} q^i - \frac{\partial s}{\partial \partial_i v^r} \left( \frac{\partial T^{jr}}{\partial e} \partial_j e + \frac{\partial T^{kr}}{\partial \partial_l v^m} \partial_{lk} v^m + \frac{\partial T^{kr}}{\partial \partial_l F_m^n} \partial_{lk} F_m^n \right) + K^i. \quad (23)$$

Itt a  $K^m = K^m(v^i, \partial_j v^i, F_j^i, \partial_k F_j^i, e)$  extra entrópiaáramra a jelölt változórendszer vonatkozik, nem a teljes konstitutív állapotterén értelmezett függvény. Végül a disszipációs egyenlőtlenséget megkapjuk, ha a LIU-egyenleteket alkalmazzuk (8)-re:

$$\begin{aligned} q^i \partial_i \frac{\partial s}{\partial e} + \frac{\partial s}{\partial v^j} \partial_i T^{ij} + \frac{\partial s}{\partial \partial_k v^j} \partial_{ki} T^{ij} + \frac{\partial s}{\partial F_j^i} \partial_j v^i + \frac{\partial s}{\partial \partial_k F_j^i} \partial_{kj} v^i - \\ \partial_i \left[ \frac{\partial s}{\partial \partial_i v^r} \left( \frac{\partial T^{jr}}{\partial e} \partial_j e + \frac{\partial T^{kr}}{\partial \partial_l v^m} \partial_{lk} v^m + \frac{\partial T^{kr}}{\partial \partial_l F_m^n} \partial_{lk} F_m^n \right) \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Ahhoz, hogy fenti egyenlőtlenséget megoldjuk, át kell alakítanunk az irreverzibilis termodinamikában megszokott erő-áram formába. Ehhez először is bevezetjük a belső energiát egy olyan általánosított alakban, ahol a mozgásgradiens megváltozásának szintén tetetlenséget tulajdonítunk:

$$u = e - \frac{1}{2} v^i v_i - \frac{\alpha_1}{2} (\dot{F}_i^i)^2 - \frac{\alpha_2}{2} \dot{F}_j^i \dot{F}_i^j, \quad (25)$$

és feltételezzük, hogy az entrópia a belső energián keresztül függ a sebességtől és a sebességgradienstől:

$$\begin{aligned} s(v^i, \partial_j v^i, F_j^i, \partial_k F_j^i, e) = \hat{s}(u, F_j^i, \partial_k F_j^i, e) = \\ \hat{s} \left( e - \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\alpha_1}{2} (\text{tr} \mathbf{F})^2 - \frac{\alpha_2}{2} \text{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}), \mathbf{F}, \nabla \mathbf{F}, e \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Ekkor a disszipációs egyenlőtlenség egyes tagjai átrendezhetőek:

$$\frac{\partial s}{\partial v^j} \partial_i T^{ij} = -\partial_k \left( \frac{\partial s}{\partial e} v_j T^{kj} \right) + \frac{\partial s}{\partial e} T^{ij} \partial_j v_i, \quad (27)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \partial_j v^i} \partial_{jk} T^{ki} = -\frac{\partial s}{\partial e} (\alpha_1 \partial_{lk} T^{lk} \delta_i^j + \alpha_2 \partial_k^j T_i^k) \partial_j v^i, \quad (28)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \partial_k F_j^i} \partial_{kj} v^i = \partial_k \left( \frac{\partial s}{\partial \partial_k F_j^i} \partial_j v^i \right) - \partial_k \left( \frac{\partial s}{\partial \partial_k F_j^i} \right) \partial_j v^i. \quad (29)$$

Ezeknek a formuláknak a vizsgálata megmutatja, hogy az extra entrópiaáram-sűrűség milyen választása egyszerűsíti a a disszipációs egyenlőtlenséget megoldható formába. Ezért azt feltételezzük, hogy

$$K^i := \frac{\partial s}{\partial e} v_j T^{ij} - \frac{\partial s}{\partial \partial_i F_j^k} \partial_j v^k.$$

Végül, bevezetve a hőáram megszokott definícióját:  $\hat{q}^i := q^i + v_j T^{ij}$ , az entrópia áramsűrűsége a következő lesz:

$$J^i = \frac{\partial s}{\partial e} \hat{q}^i + \frac{\partial s}{\partial \partial_i v^r} \left( \frac{\partial T^{jr}}{\partial e} \partial_j e + \frac{\partial T^{kr}}{\partial \partial_l v^m} \partial_{lk} v^m + \frac{\partial T^{kr}}{\partial \partial_l F_m^n} \partial_{lk} F_m^n \right) + \frac{\partial s}{\partial \partial_i F_j^k} \partial_j v^k. \quad (30)$$

A disszipációs egyenlőtlenség pedig

$$\hat{q}^i \partial_i \frac{\partial s}{\partial e} + \partial_j v^i \left( \frac{\partial s}{\partial e} T_i^j + \frac{\partial s}{\partial F_j^i} - \frac{\partial s}{\partial e} (\alpha_1 \partial_{lk} T^{lk} \delta_i^j + \alpha_2 \partial_k^j T_i^k) - \partial_k \frac{\partial s}{\partial \partial_k F_j^i} \right) \geq 0. \quad (31)$$

Ekkor bevezetjük a  $\theta$  termodinamikai hőmérsékletet az entrópia deriváltjaként  $\frac{\partial s}{\partial e} = \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{\theta}$ , és a szabadenergiát:  $\psi := u - \theta s$  azért, hogy a fenti formula mechanikai részét egyszerűsítsük. Ráadásul, izoterm folyamatokra szorítkozva, azaz feltéve, hogy a hőmérséklet homogén és állandó  $\theta_0$  értékű, azt kapjuk, hogy

$$\theta_0 \sigma_S = \partial_j v^i \left( T_i^j - \frac{\partial \psi}{\partial F_j^i} - \alpha_1 \partial_{lk} T^{lk} \delta_i^j - \alpha_2 \partial_k^j T_i^k + \partial_k \frac{\partial \psi}{\partial \partial_k F_j^i} \right). \quad (32)$$

Végül pedig még az  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  anyagi paraméterekről is feltételezzük, hogy állandóak, hogy az entrópiatermelés mechanikai részét a lehető legáttekinthetőbb formába alakítsuk:

$$\begin{aligned} \theta_0 \sigma_S &= \partial_j v^i \left( T_i^j - \frac{\partial \psi}{\partial F_j^i} - \partial_k \left( \alpha_1 \partial_l T^{lk} \delta_i^j + \alpha_2 \partial_k^j T_i^k - \frac{\partial \psi}{\partial \partial_k F_j^i} \right) \right) = \\ \nabla \mathbf{v} : \left( \mathbf{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} - \nabla \cdot \left( \alpha_1 (\nabla \cdot \mathbf{T}) \mathbf{I} + \alpha_2 \nabla \mathbf{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \mathbf{F}} \right) \right) &\geq 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Itt az indexek használata nélkül megadott második sorban a pont jelöli az indexek összegzését, így például  $\nabla \cdot$  a divergenciát. A fenti kifejezés zárójelében látható első két tag jól ismert a klasszikus rugalmasságtanból [36]. (32) utolsó tagja a hiperfeszültség bevezetésével, a virtuális teljesítmény módszerével kapható tagra emlékeztet.

A nemdisszipatív esetben, amikor a fenti jobb oldali szorzótényező, a termodinamikai áram zérus, kapjuk a harmadfok] rugalmasság anyagtörvényét, ami a következő relációt jelenti a feszültség, annak térderiváltjai, illetve a szabadenergia megfelelő deriváltja között

$$\mathbf{T} - \nabla \cdot (\alpha_1 (\nabla \cdot \mathbf{T}) \mathbf{I} + \alpha_2 \nabla \mathbf{T}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} - \nabla \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \mathbf{F}}. \quad (34)$$

Ez nem a szokásos anyagi függvénykapcsolat, hanem a baloldali második tagja miatt ez egy differenciálegyenlet, melynek szerkezete a feszültség deriváltjainak megjelenése miatt hasonlít a reológia POYNTING-THOMSON testének anyagegyenletéhez. A jobboldali első tagja a hagyományos nemlineáris rugalmasság, az utolsó tagja pedig harmadrendű hiperfeszültség-tenzor segítségével posztulált hiperrugalmasság anyagfüggvényének formáját mutatja.

### 3. EGYSZERŰ HULLÁMOK

Ebben a szakaszban kiszámoljuk az egydimenziós longitudinális hullámokra vonatkozó diszperziós relációt a kis deformációs közelítésben, hogy a fenti feszültség-deformáció kapcsolat fizikai jellegéről képet kapjunk.

Tegyük fel, hogy a szabadenergia kvadratikus és izotrop a szimmetrikus deformációban, amit a következőképpen definiálunk:  $\epsilon_i^i = \frac{1}{2}(F_j^i + F_i^j - 2\delta_j^i)$ . Ez a kis deformációs ideális rugalmasságtan anyagfüggvényét adja. Tegyük fel továbbá, hogy hasonlóan kvadratikus és izotrop a szimmetrikus deformációk gradienseiben is. Ekkor a reprezentációs tételeknek megfelelően a szabadenergia-függvény két további anyagi paramétert,  $a_1$ -et és  $a_2$ -t tartalmaz [37]:

$$\psi(\epsilon_j^i, \partial_k \epsilon_j^i) = \frac{\lambda}{2}(\epsilon_i^i)^2 + \mu \epsilon_j^i \epsilon_j^i + \frac{a_1}{2} \partial_i \epsilon_j^j \partial^i \epsilon_k^k + \frac{a_2}{2} \partial_i \epsilon_k^j \partial^i \epsilon_j^k. \quad (35)$$

A feszültség-deformáció reláció

$$T_i^j - \alpha_1 \partial_k \partial_l T^{lk} \delta_i^j - \alpha_2 \partial_k \partial^j T^k_i = \lambda \epsilon_k^k \delta_i^j + 2\mu \epsilon_i^j - a_1 (\partial_k^k \epsilon_l^l) \delta_i^j - a_2 \partial_k^k (\epsilon_i^j). \quad (36)$$

Vizsgáljuk a lehető legegyszerűbb egydimenziós esetet, a tárgyalásunkat a fenti tenzoregyenlet egyetlen komponensére korlátozva. Bevezetve a  $T = T^{11}$  és  $\epsilon = \epsilon^{11}$  jelöléseket, és  $\partial_1$ -et vesszővel jelölve kapjuk, hogy

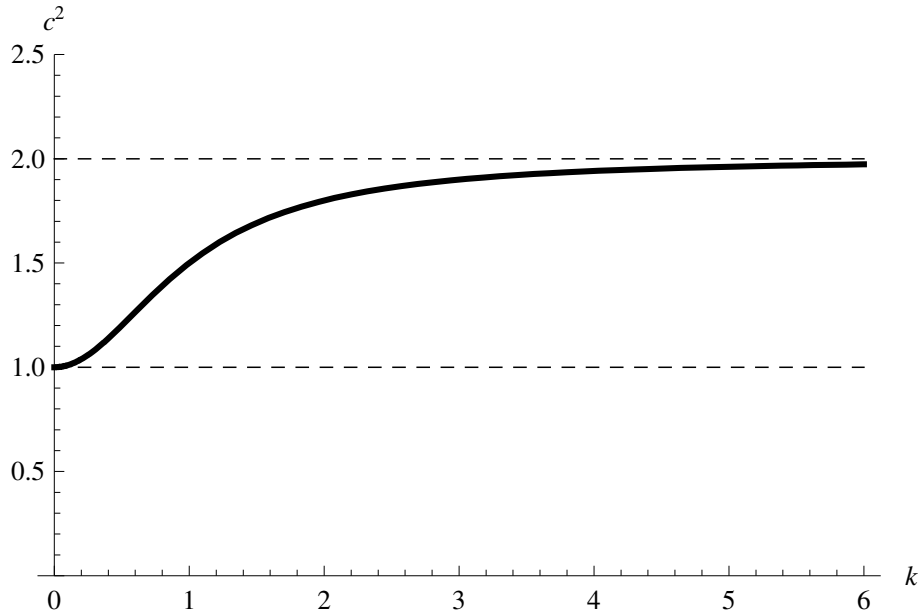
$$T - \alpha T'' = \hat{\lambda} \epsilon - a \epsilon''.$$

ahol  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\hat{\lambda} = \lambda + 2\mu$  és  $a = a_1 + a_2$ . Ez a differenciálegyenlet csatolódik az impulzummérleghez, ami esetünkben

$$\rho_0 \ddot{\epsilon} - T'' = 0.$$

Állandó anyagi paraméterek esetén a diszperziós reláció ezek után a következő:

$$\omega^2 = \frac{k^2(\hat{\lambda} + ak^2)}{\rho_0(1 + \alpha k^2)}.$$



1. ÁBRA. A fázissebesség négyzete  $c^2 = (\omega(k)/k)^2$  a hullámszám függvényében. A paraméterek értékei  $\rho_0 = 1$ ,  $\hat{\lambda} = 1$ ,  $\alpha = 1$  és  $a = 2$ .

Ez az  $\omega(k)$  diszperziós reláció a kis hullámhosszú és a nagy hullámhosszú határesetben is véges hullámsebességre vezet:  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\hat{\lambda}/\rho_0}$  és  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{a/(\alpha\rho_0)}$ , ahogy azt az 1. ábrán szemléltettük. Ez a viselkedés például a kettős hullámegyenlet jellemzője [38]. Kettős hullámegyenletet mikroszerkezeti megfontolásokkal kaphatunk, például mikrodeformáció-elméletben, vagy duális belső változók segítségével [37, 21].

#### 4. ÖSSZEFOGLALÁS

Az első fokú viszkoelaszticitás elméletének harmadfokig történő gyengén nemlokális kiterjeszhetőségét vizsgáltuk. Az entrópiaáramot konstitutív mennyiségnek tekintve a LIU-eljárást alkalmaztuk olyan módon, hogy a (2) kinematikai feltétel és az impulzusmérleg gradiensét is, mint további kényszereket is figyelembe vettük a második főtételek egyenlőtlenségéhez.

A számításokat a PIOLA–KIRCHHOFF-rendszerben, az anyagi objektivitás NOLL-féle megfogalmazásának általánosítását felhasználva végeztük. A konstitutív állapotterben ezért a sebesség és a mozgásgradiens alkotta téridő négyestenzor komponenseit és ezek első és második térderiváltjait, illetve a fajlagos teljes energiát és annak gradiensét vezethettük be a meghatározandó anyagfüggvényeink változóinak.

Nagyon fontos megjegyeznünk, hogy konstitutív állapotter magasabb deriváltakkal történő kiterjesztése nem fogja megváltoztatni az entrópiaprodukciónak a formáját, ha egyúttal



a kényszerek további deriváltjait nem vezetjük be további kényszerként. Ez a kiterjesztés valójában szükséges is legalább egy további rend erejéig, mert különben a tisztán rugalmas eset anyagtörvénye sem értelmezhető, hiszen vegyük észre, hogy a feszültség például nem függhet a deformációgradiens második deriváltjától, legalábbis (18) általunk alkalmazott megoldása kizárja ezt. Eggyel magasabb rend bevezetése könnyen megfontolhatóan már csak a harmadik deriválttól való függést zárja ki, számításaink az anyagtörvény formáját tekintve lényegében triviálisan ugyanarra vezetnek, viszont a formulák mérete és az egyenletek száma is jelentősen megnő, illetve a számítások áttekinthetősége lecsökken.

A nemlokálisan kiterjesztett állapottérrel megadtuk a LIU-egyenletek egy teljes megoldását és ezt felhasználva az entrópiaáramot és a disszipációs egyenlőtlenséget is. Az extra entrópiafluxus célszerű megválasztásával illetve a kvadratikus belső energia bevezetésével megoldhatóvá, azaz erő-áram formájúvá alakítottuk az entrópiaprodukciót. Ebből megkaptuk a nem disszipatív, tisztán mechanikai esetre vonatkozó feszültségmozgásgradiens anyagtörvényt. Ez tartalmazta a feszültség térderiváltjait is a szokásos rugalmas tagon felül, ráadásul a mozgásgradiens térderiváltjának divergenciáját tartalmazó tagot is, amit általában a kettős feszültség (double stress), vagy hiperfeszültség segítségével vezetnek le. A mi eljárásunk során nem kellett ilyen fogalmakat bevezetnünk.

Végül kiszámítottuk az egy dimenziós hullámok diszperziós relációját, és megállapítottuk, hogy ilyen diszperziós relációkat az anyagok mikroszerkezetének figyelembe vételével kapnak. A magasabbrendű nemlokális kontinuumoktól pedig pontosan az anyag tiszta rugalmasságán túlmutató, azaz a mikroszerkezetet robosztus és univerzális módon leképező konstitutív relációkat várunk [39].

Végezetül, ahogy már a bevezetésben is említettük, (34)-hoz hasonló feszültségdeformáció relációt már javasoltak [24]. Azonban ott ennek motivációja a feszültség singularitásainak eltüntetése volt egyfajta ad hoc "reakció-diffúzió" forma bevezetésével. Itt most megmutattuk, hogy a gyengén nemlokális termodinamikai elmélet megengedi ezt a fajta kiterjesztést, sőt számos további információt is nyerhetünk. Így például egy variációs megfogalmazásból adódóval egyenértékű természetes peremfeltételeket kaphatunk (az entrópiaáram nulla legyen a peremen) vagy például láttuk, hogy a feszültségderiváltak tartalmazó tagok a mozgásgradiensre vonatkozó kinetikusenergia-tagok következményei.

## 5. KÖSZÖNETEK

A szerző hálás ARKADI BEREZOVSZKINAK a remek beszélgetésekért és vitákért, továbbá CHRISTINA PAPPENFUSSNAK a számítások ellenőrzéséért. A munkát az Otká K81161 pályázatával támogatta.

## IRODALOM

- [1] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965. Handbuch der Physik, III/3.
- [2] Verhás J. *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [3] M. E. Gurtin. Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 19:339–352, 1965.
- [4] C. Papenfuss and S. Forest. Thermodynamical frameworks for higher grade material theories with internal variables or additional degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 31(4):319–353, 2006.
- [5] A. Acharya and T. G. Shawki. Thermodynamic restrictions on constitutive equations for second-deformation-gradient inelastic behaviour. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 43:1751–1772, 1995.
- [6] M. E. Gurtin. *Configurational forces as basic concepts of continuum physics*. Springer, New York-etc., 2000.
- [7] G. Maugin. *The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors (An introduction)*. World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1999.
- [8] I. Müller. *Thermodynamics*. Pitman, Toronto, 1985.
- [9] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 12(3):146–173, 2003. (cond-mat/0112214).
- [10] I-Shih Liu. Entropy flux relation for viscoelastic bodies. *Journal of Elasticity*, 90(3):259–270, 2008.
- [11] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer Verlag, Berlin-etc., 1992. 3rd, revised edition, 2001.
- [12] I. Müller and T. Ruggeri. *Rational Extended Thermodynamics*, volume 37 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer Verlag, New York-etc., 2nd edition, 1998.
- [13] I-Shih Liu. Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 46:131–148, 1972.
- [14] P. Ván. Exploiting the Second Law in weakly nonlocal continuum physics. *Periodica Polytechnica, Ser. Mechanical Engineering*, 49(1):79–94, 2005. (cond-mat/0210402/ver3).

- [15] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics - the Guyer-Krumhansl and the Cahn-Hilliard equations. *Physics Letters A*, 290(1-2):88–92, 2001. (cond-mat/0106568).
- [16] V. A. Cimmelli, A. Sellito, and D. Jou. Nonlocal effects and second sound in a nonequilibrium steady state. *Physical Review B*, 79:014303, 2009.
- [17] P. Ván and T. Fülöp. Weakly nonlocal fluid mechanics - the Schrödinger equation. *Proceedings of the Royal Society, London A*, 462(2066):541–557, 2006. (quant-ph/0304062).
- [18] M. A. Goodman and S. C. Cowin. Two problems in the gravity flow of granular materials. *Journal of fluid Mechanics*, 45/2:321–339, 1971.
- [19] P. Ván. Weakly nonlocal continuum theories of granular media: restrictions from the Second Law. *International Journal of Solids and Structures*, 41(21):5921–5927, 2004. (cond-mat/0310520).
- [20] P. Ván, A. Berezovski, and Engelbrecht J. Internal variables and dynamic degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33(3):235–254, 2008. cond-mat/0612491.
- [21] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and G. A. Maugin. Generalized thermomechanics with dual internal variables. *Archive of Applied Mechanics*, 2010. online first.
- [22] Ván P. Weakly nonlocal non-equilibrium thermodynamics - variational principles and Second Law. In Ewald Quak and Tarmo Soomere, editors, *Applied Wave Mathematics (Selected Topics in Solids, Fluids, and Mathematical Methods)*, chapter III, pages 153–186. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009. arXiv:0902.3261.
- [23] W. Muschik, Vita Triani, and Christina Papenfuss. Exploitation of the dissipation inequality, if some balances are missing. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1125–1133, 2008.
- [24] E. C. Aifantis. Update on a class of gradient theories. *Mechanics of Materials*, 35:259–280, 2003.
- [25] Asszonyi Cs. Ván P. és Szarka Z. *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapotok*, volume 5 of *Mézőngyelgés-Közvetmechanika Kiskönyvtár*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007. ISBN 978-963-420-932-4.
- [26] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [27] W. Noll. Space-time structures in classical mechanics. In *The foundations of mechanics and thermodynamics (Selected papers by Walter Noll)*, pages 204–210. Springer

Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. originally : pp28-34, Delaware Seminar in the Foundations of Physics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.

- [28] T. Matolcsi and P. Ván. Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353:109–112, 2006. math-ph/0510037.
- [29] T. Matolcsi and P. Ván. Absolute time derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, 48:053507–19, 2007. math-ph/0608065.
- [30] Fülöp T. Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. In Fülöp T., editor, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 3, pages 55–99. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [31] P. Ván. Objective time derivatives in non-equilibrium thermodynamics. *Proceedings of Estonian Academy of Sciences*, 57(3):127, 2008.
- [32] P. Ván. Anyagi sokaságok a nemrelativisztikus tér-időben. In Fülöp T., editor, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 2, pages 37–54. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [33] I. Pawł ow. Thermodynamically consistent Cahn-Hilliard and Allen-Cahn models in elastic solids. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 15(4):1169–1191, 2006.
- [34] P. Ván. Internal energy in dissipative relativistic fluids. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1161–1169, 2008. Lecture held at TRECOP'07, arXiv:07121437 [nucl-th].
- [35] V. A. Cimmelli. An extension of Liu procedure in weakly nonlocal thermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 48:113510, 2007.
- [36] In Asszonyi Cs., editor, *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye*, volume 3 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [37] R. D. Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1:417–438, 1965.
- [38] A. V. Porubov, E. L. Aero, and G. A. Maugin. Two approaches to study essential nonlinear and dispersive properties of the internal structure of materials. *Physical Review E*, (79):046608, 2009.
- [39] S. Forest and R. Sievert. Nonlinear microstrain theories. *International Journal of Solids and Structures*, 43:7224–7245, 2006.



## A KÖZETTESTEK MINŐSÉGI JELLEMZÉSÉNEK ÉS KÁROSODOTTSÁGÁNAK VISZONYÁRÓL

*Ván Péter*

KFKI RMKI ELMÉLETI FIZIKA FŐOSZTÁLY, ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BME ÉS MONTAVID  
TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

*Vásárhelyi Balázs*

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM, POLLACK M. MŰSZAKI KAR, PÉCS

*Sokféle empirikus összefüggést ismerünk a kőzettestek mechanikai jellemzői és a kőzettest osztályozási paraméterek között. Ezek az összefüggések és az alapul szolgáló kísérleti vizsgálatok egyöntetűen azt mutatják, hogy a két legfontosabb mechanikai jellemző, az alakváltozási modulus és nyomószilárdság növekszik a kőzettest épségével. Ismeretes, hogy a károsodottság és a kőzetminőség összefüggenek. Ennek az írásnak a célja ezt az összefüggést vizsgálni és összhangba hozni a kőzettestek mechanikai jellemzőivel. Megmutatjuk, hogy a kőzettest alakváltozási modulusa és a nyomószilárdsága nem függetlenek egymástól, valamint károsodásmechanikai megfontolásokkal ez a kapcsolat meghatározható.*

### 1 BEVEZETÉS

A kőzettestek mechanikai jellemzésére számos fizikai anyagi paraméter ismerete szükséges. A két legfontosabb ezek közül az alakváltozási modulus és a nyomószilárdság. Ezeket az anyagi paramétereket gyakran viszonyítjuk az ép próbatestekre vonatkozó laboratóriumi jellemzőkhöz és a kőzettest minősítési paraméterekhez, mint például az RQD, RMR, Q, GSI vagy RMi értékekhez [ezeket bővebben lásd: Gálos & Vásárhelyi, 2005]. Ezek a minősítési paraméterek számszerűsítik a kőzettest ép kőzethez viszonyított töredezettségét ezért értelmezhetőek nagy kőzettestek károsodottságának olyan mértékeként, amelyek meghatározási módja a gyakorlati felhasználás igényei szerint alakult ki.

Az alábbiakban a kőzettestek alakváltozási modulusának és nyomószilárdságának a kőzetminőséghez való viszonyát jellemezzük károsodásmechanikai keretek között. A károsodásmechanika, amit esetünkben speciális belső változós nemegyensúlyi termodinamikaként értünk, kényelmes és egyszerű elméleti keretet ad ennek a viszonyoknak a jellemzéséhez, és segít felderíteni a mechanikai jellemzők közötti kapcsolatokat. A

károsodásmechanikát általában kontinuumelméletként tárgyalják. Szokásosan a kontinuummechanika károsodásfüggő parciális differenciálegyenleteihez a károsodás időbeli fejlődésére vonatkozó közönséges differenciálegyenletek csatolódnak. Bonyolultabb, gyengén nemlokális károsodáselméletek elvetik a homogén károsodás egyszerűbb belső változóit és parciális differenciálegyenleteket javasolnak a károsodás fejlődésének leírására is. A károsodásmechanika nagy elméleti kihívása a károsodás változását leíró egyenletek meghatározása. Ebben a cikkben szereplő megfontolásainkban csak a lehető legegyszerűbb, mind a mechanikai, mind a károsodási változó szempontjából homogén rendszer feltételezésével élünk, ezért az elméleti termodinamikai modellek felállításának alapja a homogén testek termodinamikájának az időbeli változásokat is figyelembe vevő – tehát több szempontból is nemegyensúlyi – elmélete, az úgynevezett közönséges termodinamika [Matolcsi, 2005].

### 1.1 A kőzettest alakváltozási modulusa

A kőzettestek alakváltozási jellemzésére számos javaslat született. A legelfogadottabb és mért jellemző az alakváltozási (vagy húr-) modulus, amelyet a nemlineáris, tönkremenetelig terjedő feszültség-deformáció görbéből határozhatunk meg. Az alakváltozási modulus az origóból a feszültségmaximum feléig húzott húr meredeksége határozza meg [Zhang, 2005, 120.o.]. A nemzetközi szakirodalomban számos empirikus összefüggést javasolnak az alakváltozási modulus és a kőzettest minőség(érték) közötti viszony jellemzésére. Az összefüggések egy része figyelembe veszi az ép kőzet alakváltozási (rugalmassági) modulusát is. A legjelentősebb ilyen függvényeket, melyek RMR rendszerben adják meg a kőzettest alakváltozási modulusát, valamint figyelembe veszik az ép kőzet rugalmassági modulusát is, az 1. táblázatban mutatjuk be.

1. táblázat. A kőzettest  $E_{rm}$  alakváltozási modulusának kiszámítása az RMR értékből az ép kőzet  $E_i$  rugalmassági modulusának ismeretében (Megj.:  $s = \exp((RMR-100)/9)$ )

Függvény	Ref.
$E_{rm} / E_i = 1/100(0.0028RMR^2 + 0.9 \exp(RMR/22.82))$	Nicholson és Bieniawski, (1990)
$E_{rm} / E_i = (s^a)^{0.4}$ , $a=0.5+1/6((\exp(-RMR/15)-\exp(-20/3)))$	Sonmez et al., (2004)
$E_{rm} / E_i = s^{0.25}$	Carvalho, (2004)

Zhang & Einstein (2004), számos mérési eredmény statisztikai elemzése után, RQD és  $E_{rm}/E_i$  között az alábbi összefüggést javasolja:

$$E_{rm}/E_i = 10^{0.0186RQD - 1.91} \quad (1)$$

A fenti empirikus egyenleteknek nincs fizikai interpretációja. Palmström & Singh (2001), Kayabasi et al. (2003) és Gokceoglu et al. (2003) analizálták őket, megmutatva előnyeiket, hátrányaikat és néhány pontosítást is javasoltak (pl. a nedvesedési és a mállási hatás figyelembe vételét).

## 1.2 A kőzettest szilárdsága

Kőzettest nyomószilárdságának ( $\sigma_{cm}$ ) a töredezettséget tekintetbe vevő becslésére számos empirikus formula vonatkozik. A 2. táblázat felsorol néhány olyat ezek közül, ahol az ép kőzet nyomószilárdsága ( $\sigma_c$ ) szerepet játszik, valamint ugyancsak RMR értékkel történt a kőzettest minősítése. A függvényformájuk egységesen exponenciális, de különböző paraméterekkel.

2. táblázat Empirikus függvénykapcsolatok a kőzettest  $\sigma_{cm}$  egyirányú nyomószilárdságára a kőzettest minőségének (RMR) függvényében, ha az ép kőzet  $\sigma_c$  nyomószilárdsága ismert.

Függvény	Ref.
$\sigma_{cm}/\sigma_c = \exp(7.65((RMR-100)/100))$	Yudhbir et al. (1983)
$\sigma_{cm}/\sigma_c = \exp((RMR-100)/18.5)$	Ramamurthy et al. (1985)
$\sigma_{cm}/\sigma_c = \exp((RMR-100)/25)$	Kalamaras & Bieniawski (1993)
$\sigma_{cm}/\sigma_c = \exp((RMR-100)/18)$	Hoek et al. (1995)
$\sigma_{cm}/\sigma_c = \exp((RMR-100)/20)$	Sheorey (1997)

## 2 A KÁROSODÁS BEVEZETÉSE

A következőkben a kőzettestek osztályozására a kőzetmechanikában használt empirikus kőzetminőségi mértékeket (pl. RQD, RMR, GSI) skalár károsodási mértékként értelmezzük és  $D_{RM}$ -el jelöljük. Ezek a kőzettest osztályozásra bevezetett mennyiségek azonban inkább 'épségi', mint károsodási mennyiségeknek tekinthetőek, mert nullák maximális károsodás esetén és százalékban mérve 100 %-ot adnak a teljesen töredezett kőzetre. Ezért célszerű bevezetünk és  $D$ -vel jelölünk egy károsodást jellemző változót. A  $D = 0$  érték fogja az ép (tagolatlan) kőzetet jellemezni és egy  $D = D_{cr}$  kritikus károsodási érték a teljesen töredezett kőzetet. A továbbiakban a számszerű jellemzés relatív értékeit megtartva a legegyszerűbb lineáris összefüggést javasoljuk az 'épségi' mértékek károsodásként történő értelmezésére:

$$D = D_{cr} \left( 1 - \frac{D_{RM}}{100} \right) \quad \text{ezért} \quad D_{RM} = 100 \left( 1 - \frac{D}{D_{cr}} \right). \quad (2)$$

Itt  $D_{RM}$  a kőzettest minősítési értéke, ahol RM valamelyik kőzettest osztályozási rendszert jelöli (RQD, RMR vagy GSI értékek, amelyek 0 és 100 között változhatnak). Egyszerűsítésként feltételezzük, hogy  $D_{cr} = 1$ . Esetünkben ez nem jelent megszorítást, mert nem próbálunk a károsodásnak közvetlen fizikai jelentést tulajdonítani (mint amilyen például a mikrorepedések sűrűsége vagy fraktáldimenziója lenne) és elfogadjuk a kőzettest osztályozásra bevezetett mérési és normálási módszereket helyes jellemzésnek. Tudjuk, hogy mind a Q, mind az RMI módszereknél a kőzettest minősége nemlineárisan függ ezektől a paraméterektől, ezért az ezekre a paraméterekre alapozó empirikus összefüggéseket itt most nem vizsgáljuk.

A továbbiakban tehát feltételezzük, hogy



- a  $D = 0$  esetben a kőzettest mechanikai paraméterei megegyeznek az ép kőzet megfelelő paramétereivel,
- a  $D \neq 0$  esetben az ismert empirikus összefüggések jól jellemzik a kőzettestet.

### 2.1 Károsodási modell a kőzettest alakváltozásának jellemzésére

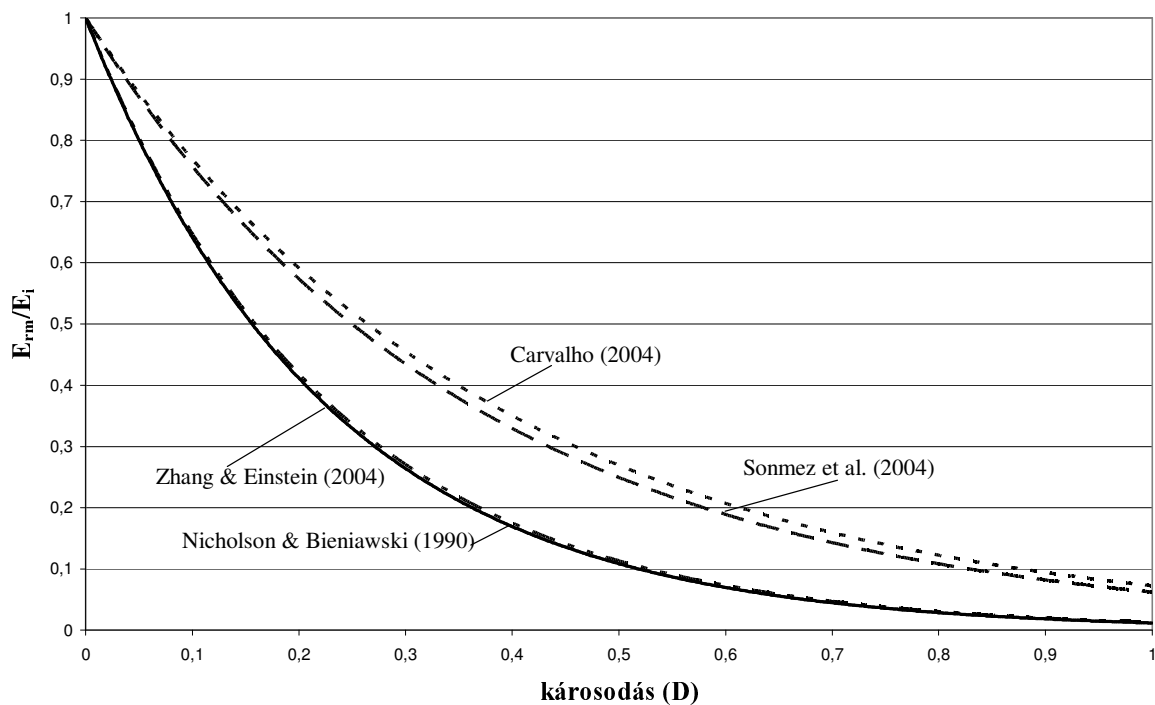
Az 1. táblázat függvényeit a  $D$  károsodásváltozó bevezetésével a következő formába transzformálhatjuk

$$\frac{E_{rm}}{E_i} = e^{-AD}. \quad (3)$$

Az  $A$  anyagi paraméter értékeit a publikált empirikus összefüggésekre vonatkozóan egyrészt közvetlenül leolvashatjuk az empirikus formulákból, másrészt illesztéssel meghatározhatjuk. Adatok hiányában mi a formulákból számolt adatsorra illesztettünk ez utóbbi esetben. A kapott  $A$  értékeket a 3. táblázatban összegeztük.

3. táblázat A (3) egyenlet  $A$  paramétere az 1. táblázat empirikus képleteiből

$A$	Egyenlet:
4,358	Nicholson & Bieniawski (1990)
4,440	Zhang & Einstein (2004)
2,624	Sonmez et al. (2004)
2,778	Carvalho (2004)



1. ábra A kőzettest alakváltozási modulusára és a kőzettest minőségre vonatkozó empirikus összefüggések a károsodásváltozóra átszámolva (lásd (3) egyenletet és 3. táblázatot).

Az  $A$  paraméter kétféle jellemző értéket látszik felvenni. A Nicholson-Bieniawski (1990) és a Zhang-Einstein (2004) esetben 4,4 körül van, viszont a Sonmez et al (2004) és Calvalho (2004) által javasolt összefüggésekben értéke közelítőleg 2,7.

Viszont mind Sonmez et al. (2004), mind Carvalho (2004) az ép kőzetekre vonatkozó  $s$  Hoek-Brown-állandó használatát javasolta formuláikban ép és csatlakozó kőzettestek esetén is. Ha az  $A$  paramétert a zavart kőzeteknek megfelelően számoljuk át ( $s = \exp((RMR-100)/6)$ , Hoek & Brown, 1988), akkor  $A = 3,936$  és  $A = 4,167$  a két modellben, mely értékek megközelítik a másik két empirikus eredményt.

## 2.2 Károsodási modell a kőzettest nyomószilárdságának jellemzésére

A kőzettest alakváltozási modulusához hasonlóan, átszámoltuk a  $\sigma_{cm}$  nyomószilárdság empirikus formuláit is károsodás változóba, felhasználva az ép kőzet  $\sigma_c$  nyomószilárdságát

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = \exp(-BD). \quad (4)$$

A számított  $B$  paramétereket a 4. táblázatban soroltuk fel.

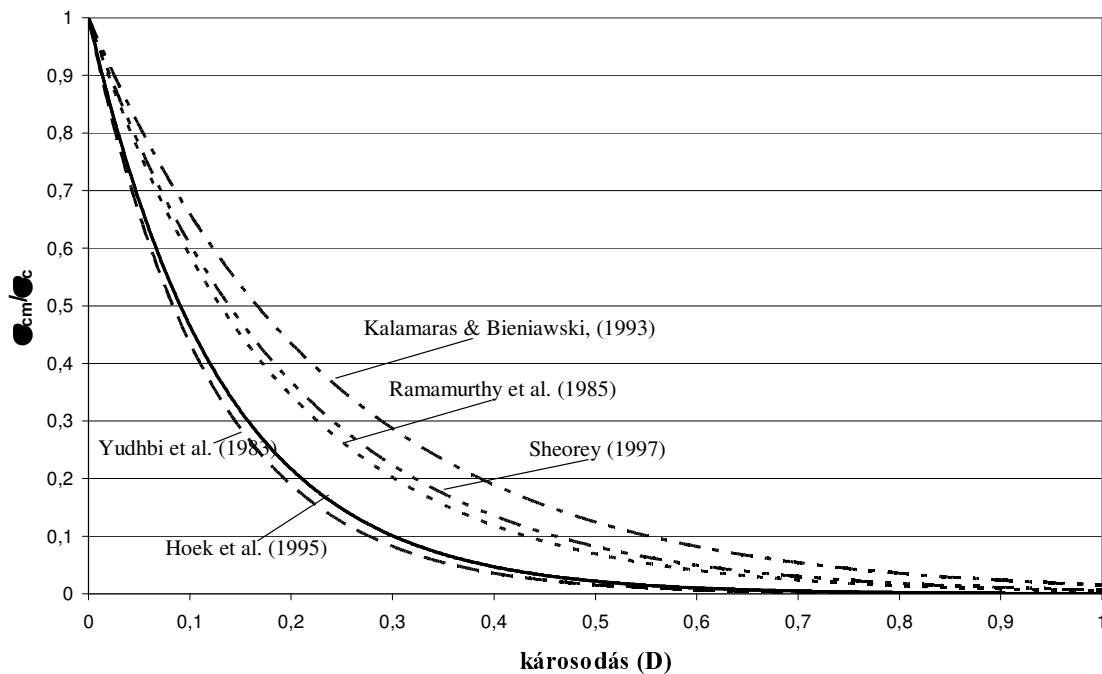
4. táblázat. A kőzettest nyomószilárdságának károsodásfüggését megadó (4) egyenletben szereplő  $B$  paraméter értékei

$B$	Ref.
7,650	Yudhbi et al. (1983)
5,333	Ramamurthy et al. (1985)
4,167	Kalamaras & Bieniawski (1993)
5,556	Hoek et al. (1995)
5,000	Sheorey (1997)

A  $B$  paraméter átlagos értéke 5,542 (4,167 és 7,650 között; 1,291 szórással). A 2. ábrán ábrázoltuk ezeket az összefüggéseket.

## 2.3 Termodinamika és károsodásmechanika

A károsodásmechanika a tönkremenetel jellemzésére vezet be fizikai mennyiségeket (Krajcinovic, 1996). A károsodás termodinamikai elméletei belső termodinamikai változóként értelmezve ezeket a mennyiségeket biztosítják, hogy az új változók bevezetése a termodinamika második főtételével összhangban történjen. A termodinamikai keretek egyik előnye, hogy lehetővé teszik a károsodásmechanika legfontosabb részének, a károsodás időbeli változását megadó fejlődési egyenleteknek lehetséges formájának meghatározását, összhangban a második főtétellel. Az elméleti keretek nagyon hasonlóak ahhoz, mint amire a reológia és a képlékenység elméletei is épülnek [Asszonyi et al., 2007]. A másik fontos előny, hogy a fejlődési egyenletek ismerete nélkül, már a sztatikai vizsgálatokkal tönkremeneteli feltételeket fogalmazhatunk meg, a tönkremenetelt az anyag károsodottságának növekedésekor bekövetkező termodinamikai stabilitásvesztéseként értelmezve [Ván, 2001, Ván & Vásárhelyi, 2001].



2. ábra. A kőzettest nyomószilárdságának a kőzettest minőségétől való függésére vonatkozó empirikus összefüggések. A  $D$  károsodás függvényében átszámolt görbék ábrázolása (lásd (4) egyenletet és 4. táblázatot).

A károsodásmechanika számos elmélete a termodinamikai potenciálok (pl. szabadenergia) polinomiális függését tételezi fel a deformációtól és a károsodástól. Ezt a fajta függést mezoszkopikus számítások [Papenfuss et al. 2007] és a rugalmasságtan elméletével megtartott teljes analógia motiválja. Másodrendű tenzort (fabric tensor) vezetve be károsodási paraméterként, a rugalmasságtannal azonos elveket alkalmazhatunk a szabadenergiának a károsodástól és a deformációtól való függésének meghatározására. Például izotrop károsodás esetén a szabadenergia legáltalánosabb, másodfokú polinomiális függvénye [Papenfuss & Ván, 2008] 11 anyagi paramétert tartalmaz a rugalmassági paramétereken kívül. A másodrendű tenzor azonban nem az egyetlen lehetséges károsodási változó, például a mikrorepedezés irány és hossz szerinti átlagolása skalár illetve vektori rendű károsodási paraméterekhez is vezethet, a repedésrendszer szimmetriáitól függően. Mivel a kőzettest osztályozási módszerek nem veszik figyelembe a repedés- és töredezés-rendszer részleteit, ezért mi is a továbbiakban a lehető legegyszerűbb, skaláris változót tartalmazó és minimális számú anyagi paramétert bevezető modell felállítására törekszünk. Ráadásul a kőzettestek mechanikai tulajdonságainak meghatározására szinte kizárólag egytengelyű terheléseket tudunk alkalmazni, ezért a mechanikai változóink is skalárok lesznek.

A termodinamikai megfontolások biztosítják, hogy elméleti modellünk robosztus, azaz a paraméterek változására érzéketlen legyen. A továbbiakban izoterm rendszereket tárgyalunk, ezért a hőmérséklet nem szerepel a megfontolásainkban és termodinamikai potenciálként a szabadenergiát vezetjük be.

**Exponenciális modell:** Első észrevételünk az, hogy a károsodás különbözik a nemegyensúlyi termodinamika klasszikus belső változótól az egyirányú terjedési tulajdonságban: a károsodás az idő függvényében tipikusan növekszik, csökkenni csak ritka, kivételes esetekben hajlandó. Ezért a szabadenergia károsodásfüggésekor olyan függvénykapcsolat is szóba kerülhet, amely nem szimmetrikus a nullára, esetleg nem is értelmezett negatív károsodás esetén. Ez a megfigyelés vezet az első alapfeltevésünkhöz: a károsodás egységesen gyengíti a közzettest rugalmas kötéseit, és a rugalmas energia csökkenése arányos az anyag rugalmasenergia-tartalmával. Azaz feltételezzük, hogy a károsodás *energetikai* jellegű, és ugyanaz a károsodás a jobban deformálódott közeg energiatartalmát jobban csökkenti.

1. **FELTEVÉS.** Az  $F = F(\varepsilon, D)$  szabadenergia károsodásfüggésére vonatkozóan a következő differenciálegyenlet vonatkozik:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial D} \right|_{\varepsilon} = -\alpha F(\varepsilon, D). \quad (5)$$

Itt  $\varepsilon$  a károsodott közzettest deformációja.

2. **FELTEVÉS.** A nyomás arányos a deformációval, azaz károsodásfüggő az alakváltozási modulus:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right|_D = \sigma = E(D)\varepsilon, \quad (6)$$

ahol  $E(D)$  az említett károsodásfüggő alakváltozási modulus. A szabadenergia parciális deriváltja a deformáció szerint a nyomás. Az (5) és (6) feltételek alapján a szabadenergia a következő

$$F(\varepsilon, D) = e^{-\alpha D} \left( E_i \frac{\varepsilon^2}{2} + F_0 \right). \quad (7)$$

Itt az  $E_i$  és  $F_0$  állandók az ép közet alakváltozási modulusa ( $D = 0$ ) és a terheletlen, ép közet szabadenergiája  $F_0 = F(\varepsilon=0, D=0)$ .

Ennek megfelelően az alakváltozási modulusot a (6) egyenlet alapján számolhatjuk:

$$\frac{1}{\varepsilon} \left. \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right|_D = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E(D) = E_i e^{-\alpha D}. \quad (8)$$

Ez az exponenciális kapcsolat megfelel a kísérleti adatoknak, ahogy az első fejezet empirikus formulái mutatják.

Másrésről pedig a termodinamikai stabilitás feltételei, azaz a szabadenergia konvexitása is vizsgálható. Ha a szabadenergia konvexitása sérül, akkor a termodinamikai állapot nem stabil. Ez pontosan az, amit a károsodástól elvárunk: egy bizonyos károsodásérték felett az anyag

instabil. Azaz, a nyomást növelve, egy adott károsodottságnál elérünk egy kritikus deformáltsághoz (és nyomásértékhez), ami felett a károsodottság növekedésnek indul. Ez a feltétel esetünkben a szabadenergia második deriváltja segítségével vizsgálható:

$$\partial^2 F = \begin{pmatrix} E_i e^{-\alpha D} & -\alpha E_i e^{-\alpha D} \varepsilon \\ -\alpha E_i e^{-\alpha D} \varepsilon & \alpha^2 e^{-\alpha D} \left( E_i \frac{\varepsilon^2}{2} + F_0 \right) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Sylvester kritériumát használva tudjuk, hogy a fenti mátrix pozitív definit, ha a determinánsa pozitív, azaz

$$\det(\partial^2 F) = \alpha^2 E_i e^{-2\alpha D} \left( F_0 - E_i \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \geq 0. \quad (10)$$

A determináns zéró volta tönkremeneteli feltételt eredményez. Felismerhetjük, hogy ez egy kritikus mechanikai energia feltétele, ahol a kritikus deformáció  $\varepsilon_{cm}$  a következő:

$$\varepsilon_{cm} = \sqrt{\frac{2F_0}{E_i}}. \quad (11)$$

Ebből kiszámolhatjuk a  $\sigma_{cm}$  közettest szilárdságot, a (8) egyenlőségnek megfelelően

$$\sigma_{cm} = E(D) \varepsilon_{cm} = E_i e^{-\alpha D} \sqrt{\frac{2F_0}{E_i}}. \quad (12)$$

Az ép közet szilárdsága  $\sigma_c = E_i \varepsilon_c$ , ezért (12)-ből kapjuk, hogy

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = e^{-\alpha D}. \quad (13)$$

Ez az alak megfelel a 2. táblázat empirikus kapcsolatainak, és a deformációt tartalmazó (8) egyenletnek is. Továbbá, a (13) szerint az empirikus  $\alpha$  paraméter értéke egyenlő az nyomószilárdságra vonatkozó (4) formula  $B$  paraméterével.

**Hatvány-exponenciális modell:** Singh és Rao (2005) kísérletei azonban finomítják a fenti képet. Töredezett, tagolt mintákon végzett laboratóriumi kísérleteik a tagoltsági és irányoktól rendszertől lényegében függetlenül azt mutatják, hogy

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = \left( \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_c} \right)^q, \quad (14)$$

ahol  $q = 0,625$  [Singh & Rao, 2005]. Ez a formula azonban csak  $q = 1$  esetén konzisztens termodinamikai modellünkkel, illetve az azt megalapozó két alapfeltevésével.

Az első feltevésünk látszik ellentmondani Singh és Rao méréseinek, ezért következő modellünkben csak annyit fogunk megkövetelni, hogy a *deformálatlan* közet gyengülése legyen arányos az energiatartalmával, vagyis

1-A. FELTEVÉS. Az  $F = F(\theta, D)$  szabadenergia károsodásfüggésére vonatkozóan a következő differenciálegyenletet írhatjuk fel:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial D} \right|_{\varepsilon=0} = -\alpha F(0, D). \quad (15)$$

Illetve továbbra is megtartjuk, hogy:

2. FELTEVÉS. A nyomás arányos a deformációval, azaz károsodásfüggő az alakváltozási modulus:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right|_D = \sigma = E(D)\varepsilon, \quad (16)$$

ahol  $E(D)$  az említett károsodásfüggő alakváltozási modulus. (15) és (16) feltételek alapján egy megfelelő szabadenergia a következő

$$F(\varepsilon, D) = e^{-\alpha D} \left( E(D) \frac{\varepsilon^2}{2} + F_0 \right). \quad (17)$$

Látjuk, hogy (7)-hez képest az előzőekben az ép kőzet alakváltozási modulusának tekintett paraméter ez esetben egy deformációtól függő függvényként adódik. Az  $F_0$  állandó továbbra is a terheletlen, ép kőzet szabadenergiája  $F_0 = F(\varepsilon=0, D=0)$ .

Ennek megfelelően az  $\hat{E}(D)$  alakváltozási modulusot a (16) egyenlet alapján számolhatjuk:

$$\left. \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right|_D = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \hat{E}(D) = E(D)e^{-\alpha D}. \quad (18)$$

Az eredmény továbbra is közelítőleg exponenciálisnak tűnik (pl. ha az alakváltozási modulus károsodásfüggése polinomiális). Az ép kőzet rugalmassági modulusára vonatkoztatva kapjuk, hogy

$$\frac{E_{cm}}{E_c} = \frac{\hat{E}(D)}{\hat{E}(0)} = \frac{E(D)e^{-\alpha D}}{E(0)}. \quad (19)$$

A termodinamikai stabilitás feltételei, azaz a szabadenergia konvexitása megint a tönkremeneteli feltételünket, azaz végső soron a szilárdságot adja. Ez a feltétel ismét szabadenergia második deriváltja segítségével vizsgálható:

$$\partial^2 F = e^{-\alpha D} \begin{pmatrix} E & (E' - \alpha E)\varepsilon \\ (E' - \alpha E)\varepsilon & (E'' - 2\alpha E' + \alpha^2 E) \frac{\varepsilon^2}{2} + \alpha^2 F_0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Sylvester kritériumát használva most két feltételt kapunk a mátrix pozitív definitására. A jobb alsó tag pozitivitása eredményezi az első kritikus deformációt:

$$\varepsilon_{cm1}(D) = \sqrt{\frac{-2\alpha F_0}{E'' - 2\alpha E' + \alpha^2 E}} \quad (21)$$

ahol a vessző a károsodás szerinti deriváltat jelöli. A mátrix determinánsának pozitivitása miatt pedig azt kapjuk, hogy

$$\varepsilon_{cm2}(D) = \sqrt{\frac{-2\alpha F_0}{E'' - 2\alpha E' + \alpha^2 E - \frac{2}{E}(E' - \alpha E)^2}}. \quad (22)$$

Észrevehető, hogy mindkét kritikus deformáció károsodásfüggő. A továbbiakban az első feltételt fogjuk vizsgálni, mert ez adja kisebb kritikus deformációt, amint ezt a nevező utolsó tagjának pozitivitása mutatja.

Ebből számolhatjuk a  $\sigma_{cm}$  kritikus közettest szilárdságot a (18) egyenlőségnek megfelelően,

$$\sigma_{cm} = \hat{E}(D)\varepsilon_{cm1}(D). \quad (23)$$

Ezt az ép közet szilárdságával elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = \frac{\hat{E}(D)\varepsilon_{cm1}(D)}{\hat{E}(0)\varepsilon_{cm1}(0)} = \frac{\hat{E}(D)}{\hat{E}(0)} \sqrt{\frac{(E'' - 2\alpha E' + \alpha^2 E)_{D=0}}{E'' - 2\alpha E' + \alpha^2 E}}. \quad (24)$$

A (14) Singh-Rao feltételbe helyettesítve az adódik, hogy

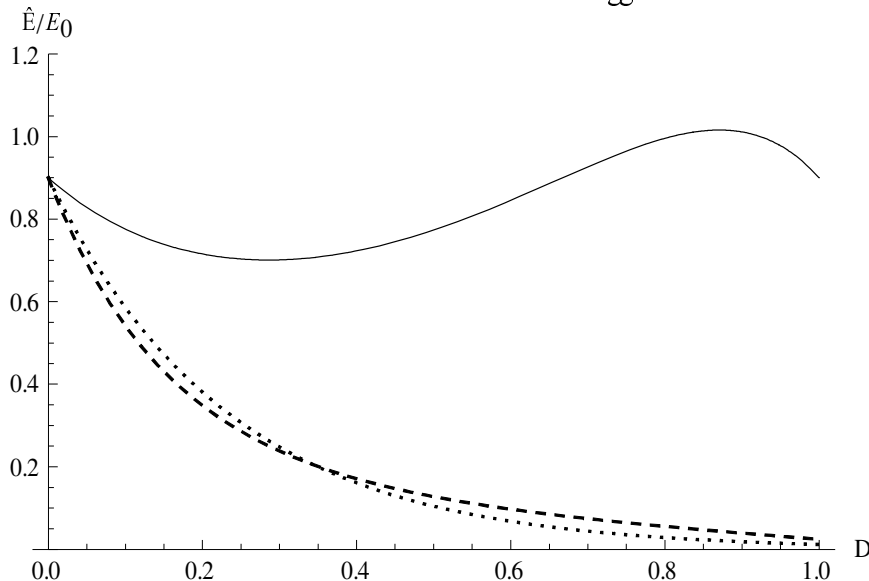
$$\left(\frac{E_{cm}(D)}{E_c}\right)^q = \left(\frac{\hat{E}}{\hat{E}_0}\right)^q = \frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = \frac{\hat{E}}{\hat{E}_0} \sqrt{\frac{\hat{E}''(0)}{\hat{E}'' e^{AD}}}. \quad (25)$$

Ezt kicsit átrendezve, (5)-höz hasonlóan, differenciálegyenletként megfogalmazható feltételt kapunk az alakváltozási modulus károsodásfüggésére:

$$\hat{E}'' - \hat{E}''(0)e^{-AD}\hat{E}^{2(1-q)} = 0. \quad (26)$$

Az ehhez tartozó peremfeltételek a következők  $\hat{E}(1) = 0, \hat{E}(0) = E_i$ .

A deformáció modulus károsodásfüggése



5. ábra: Az alsó szaggatott vonal a Zhang-Einstein formula, a pontozott vonal pedig differenciálegyenlethől számolt  $E_{cm}/E_c = \hat{E}/E_0$ . A felső vonal ez utóbbinak az exponenciálistól való eltérését mutatja, azaz

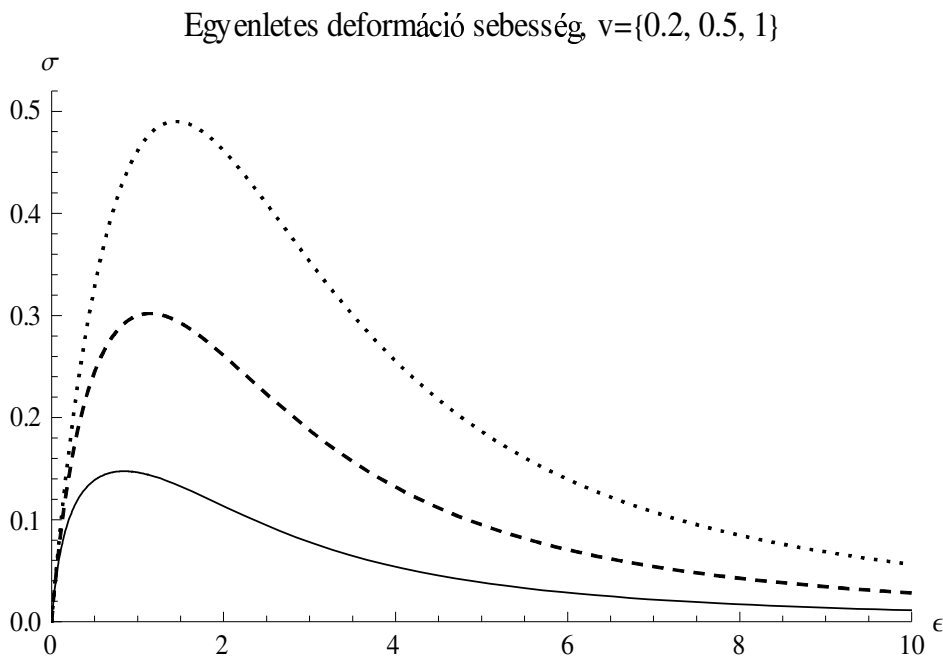
$\hat{E}/E_0 = \hat{E}e^{AD}/E_0$ -t,  $q=0,625$ ,  $A=3,6$ ,  $E(0)=0,9$ ,  $E(1)=0,9$ ,  $E''(0)=3,6$  paraméter értékekkel. A modell paraméterei azok, amik a Zhang-Einstein képletben illesztődnek az adatokra, illetve  $q$  és  $E''(0)$ .

### 3 DINAMIKAI VIZSGÁLATOK

A termodinamikai megfontolásokból a károsodás időbeli változását leíró differenciálegyenletet is megkaphatjuk, ha az entrópiaprodukcióban a károsodásváltozó időderiváltját, azaz a rá vonatkozó fejlődési egyenletet, tekintjük termodinamikai áramnak a termodinamikai reológiához hasonlóan [Verhás, 1986; Ván és Asszonyi, 2006]. Ennek legegyszerűbb formája az exponenciális modellre felírva a következő:

$$\dot{D} = -L \left. \frac{\partial F}{\partial D} \right|_{\varepsilon} = -L e^{-aD} \left( E_i \frac{\varepsilon^2}{2} + F_0 \right). \quad (27)$$

Itt  $L$  a lineáris nemnegatív Onsager-féle vezetési együttható, amely a változások sebességét jellemző anyagi paraméter. Feltételezve, hogy a mechanikai egyensúly beállása sokkal gyorsabb, mint a károsodási folyamat, a feszültség időbeli változását (16) miatt egyértelműen megadja a deformáció időfüggése. Tegyük fel, hogy a deformáció változási sebessége egyenletes és a sebessége  $v$ , azaz  $\varepsilon = vt$ . Ekkor (27) differenciálegyenlet megoldásával kiszámolhatjuk a különböző deformációsebességek mellett fellépő feszültség-deformáció görbéket. A 6. ábrán a feszültség-deformáció viszony alakulását ábrázoltuk különböző deformáció sebességek esetén. A 7. ábra pedig az anyagfüggvény egyetlen károsodási paraméterének a szerepét ábrázolja.



6. ábra: A feszültség deformációfüggése különböző egyenletes deformációsebességek esetén. A sebesség növekedésével növekszik a látszólagos nyomószilárdság (a görbék maximuma). A nem rideg viselkedés, azaz a negatív meredekségű rész a károsodás növekedésének köszönhető. Az ábra csak a kvalitatív viselkedést mutatja.

### 4 KÖVETKEZMÉNYEK

A kőzettest alakváltozási modulusára vonatkozó empirikus függvények  $s = \exp((RMR-100)/9)$  esetén összegezhetőek a következő formában

$$\frac{E_{RM}}{E_i} = e^{\frac{RMR-100}{a}}, \quad (14)$$



ahol  $22,5 < a < 38,1$  (5. táblázat) és az átlagérték 30 (szórás: 8,3!) körül van, míg ha a zavart kőzettestet jellemző  $s = \exp((RMR-100)/6)$  Hoek-Brown paramétert használjuk, akkor az átlagérték 23,7 (szórás csupán 1,3!).

5. táblázat A (14) egyenletben szereplő anyagi paraméter értéke a 3. táblázat adataiból, az 1. táblázat egyenleteinek felhasználásával. A zárójelben levő szám a zavart kőzettestet jellemző  $s$  Hoek-Brown paraméter használatával adódik.

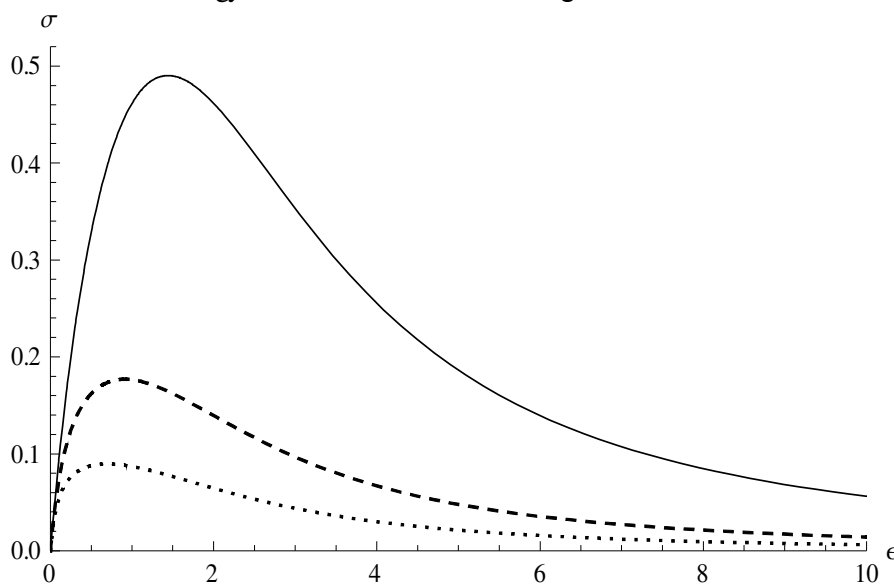
Egyenlet:	$a$
Nicholson & Bieniawski (1990)	22,95
Zhang & Einstein (2004)	22,52
Sonmez et al. (2004)	38,11 (25,41)
Carvalho (2004)	36,00 (24,00)

A kőzettest nyomószilárdságára hasonló egyenletet használhatunk

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = e^{\frac{RMR-100}{b}}, \quad (15)$$

ahol  $13,75 < b < 24,00$ , az átlag 18,76 (szórás: 3,94). Kivéve a többi eredménytől teljesen eltérő Yudhbi et al. (1983) egyenletét, akkor  $b = 20,19$ ; 2,67-es szórással.

Egyenletes deformáció sebesség,  $\alpha=\{1, 2, 3\}$



7. ábra: A feszültség deformációfüggése egyenletes deformációsebesség és különböző károsodási paraméterek esetén. Az  $\alpha$  paraméter növekedése ridegebbé teszi az anyagot abban az értelemben, hogy megnöveli a látszólagos nyomószilárdságot. Ugyanakkora károsodás nagyobb feszültség hatására megy végbe. Az ábra csak a kvalitatív viselkedést mutatja.

6. táblázat. A  $b$  paraméter a (15) egyenletből a 4. táblázat paraméterértékeinek felhasználásával.

Ref.	$b$
Yudhbi et al. (1983)	13,07
Ramamurthy et al. (1985)	18,75
Kalamaras & Bieniawski (1993)	24,00
Hoek et al. (1995)	18,00
Sheorey (1997)	20,00

Vegyük észre, hogy egyszerűbb, exponenciális károsodásmodellünk azt követelné meg, hogy  $a = b$  legyen az RMR változóban történő kőzettest jellemzés esetén is, nemcsak a károsodásváltozóban.

Feltételezve az  $a = b$  egyenlőséget, az alakváltozási modulus és a szilárdság közötti viszony:

$$\frac{\sigma_{cm}}{\sigma_c} = \frac{E_{rm}}{E_i} = e^{\frac{RMR-100}{22}}. \quad (16)$$

A fentebb elemzett empirikus összefüggések azonban különböző értéket eredményeznek  $a$ -ra és  $b$ -re (lásd az 5. és 6. táblázatokat). A különbség kicsinek tekinthető, ha figyelembe vesszük az alakváltozási modulus és károsodási (kőzettest-minőségi) jellemzők mérési módjának, mérésének és definíciójának bizonytalanságait. Elfogadva az egyszerűbb modellen alapuló elméleti  $a=b$  javaslatot (16)-ból kapjuk, hogy

$$\frac{E_{rm}}{\sigma_{cm}} = \frac{E_i}{\sigma_c}, \quad (17)$$

ahol  $E_i/\sigma_c$  az MR (modification ratio) módosítási hányados (lásd Palmström & Singh 2001).

Másrésről a (3) és (4) empirikus formulák szintén megadnak függvénykapcsolatot az  $E_{rm}$  alakváltozási modulus és a  $\sigma_{cm}$  nyomószilárdság között, a károsodási modell figyelembe vétele nélkül is:

$$\frac{E_{rm}}{\sigma_{cm}} = \frac{E_i}{\sigma_c} e^{\frac{(B-A)(RMR-100)}{100}}, \quad (18)$$

ahol  $A$  és  $B$  a (3) és (4) egyenlet alapján adottak. A 3. és 4. táblázat értékeinek felhasználásával a  $B-A$  különbségek 0 és 5 között mozognak, 2-es átlagértékkel. Tehát az átlagértékkel

$$\frac{E_{rm}}{\sigma_{cm}} = \text{MR} \times e^{\frac{2(RMR-100)}{100}}, \quad (19)$$

ahol MR a módosítási hányados.

Mint láttuk, a részletesebb információkat szolgáltató Singh & Rao (2005) összefüggés szintén beilleszthető egy módosított - a hatvány-exponenciális - modell keretei közé, azaz termodinamikailag következetes kiegészítést jelent. Az ismertett termosztatikai összefüggések nemegyensúlyi általánosításai a stabilitásvesztés részletesebb, dinamikai vizsgálatát is lehetővé teszik.

Végül megjegyezzük, hogy az ismertett módszer alapján károsodáson alapuló háromdimenziós tönkremeneteli feltételrendszer is kidolgozható, úgy, ahogyan azt ép kőzetekre Ván & Vásárhelyi, 2001-ben megmutatta, és alkalmasint használható összetettebb gyakorlati kérdések vizsgálatára is, mint például a víztartalomnak a kőzet szilárdságára gyakorolt hatása (lásd pl. Romana & Vásárhelyi, 2007).

#### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerzők köszönik a Montavid Termodinamikai Kutatócsoportnak és különösen Asszonyi Csabának és Fülöp Tamásnak a megvilágító vitákat, illetve az OTKA K81161 pályázatnak a támogatást.

## IRODALOM

- Aydan, O. & Dalgic, S. 1998. *Prediction of deformation behavior of 3-lanes Bolu tunnels through squeezing rocks of North Anatolian fault zone (NAFZ)*. Proc. Reg. Symp. Sedimentary Rock Engng. Taipei, 228-233.
- Calvalho, J. 2004. *Estimation of rock mass modulus*. Equation from the publication of Hoek & Diederichs (2006).
- Gálos M. & Vásárhelyi B. 2006. *Kőzettestek osztályozása az építőmérnöki gyakorlatban*, Műszaki Egyetemi Kiadó, Budapest, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 1. kötet. p. 144.
- Gokceoglu, C., Sonmez, H. & Kayabasi, A. 2003. Predicting the deformation moduli of rock masses. *Int. J. of Rock Mech. & Mining Sci.* **40**: 701–710.
- Hoek, E. & Brown, E.T. 1988. *The Hoek-Brown criterion – a 1988 update*. Proc. 15<sup>th</sup> Can. Rock Mech. Symp. Univ. Toronto, 31-38.
- Hoek, E., Kaiser, P.K. & Bawden, W.F. 1995. *Support of underground excavations in hard rock*. Balkema, Rotterdam.
- Kalamaras, G.S. & Bieniawski, Z.T. 1993. *A rock mass strength concept for coal seams*. Proc. 12<sup>th</sup> Conf. Ground Control in Mining. Morgantown, 274-283.
- Kayabasi, A., Gokceoglu, C. & Ercanoglu, M. 2003. Estimating the deformation modulus of rock masses: a comparative study. *Int. J. of Rock Mech. & Mining Sci.* **40**(1): 55–63.
- Krajcinovic, D. 1996, *Damage mechanics*, Elsevier, Amsterdam-etc.
- Matolcsi T. 2005. *Ordinary Thermodynamics*, Academic Publishers, Budapest.
- Nicholson, G.A. & Bieniawski, Z.T. 1990. A nonlinear deformation modulus based on rock mass classification. *Int. J. Min. Geol. Eng.* **8**:181–202.
- Palmström, A. & Singh, R. 2001. The deformation modulus of rock masses - comparisons between in situ tests and indirect estimates. *Tunnel. Underg. Space Technol.* **16**: 115-131.
- Papenfuss, C. & Ván P. 2008. *Scalar, vectorial, and tensorial damage parameters from the mesoscopic background*. Proc. of Estonian Academy of Sci. **57**(3): 132-141.
- Papenfuss, C., Böhme, T., Herrmann, H., Muschik, W. & Verhás, J. 2007. Dynamics of the size and orientation distribution of microcracks and evolution of macroscopic damage parameters. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **32**(2), 129–143.
- Romana, M. & Vásárhelyi, B. 2007. *A discussion on the decrease of unconfined compressive strength between saturated and dry rock samples*. In: L.R. Soussa, C. Ollala, & N.F. Grossmann (eds.) Proc. 11<sup>th</sup> . ISRM Cong. Lisboa, “The Second Half Century of Rock Mechanics” I:139-142, Taylor & Francis.
- Sheorey, P.R. 1997. *Empirical rock failure criteria*. Balkema, Rotterdam.
- Singh, M. & Rao, K. S. 2005. Estimating the Strength of Jointed Rock Masses, *Engineering Geology*, **77**, p127-137.
- Sonmez, H., Gokceoglu, C., & Ulusay, R. 2004. Indirect determination of the modulus of deformation of rock masses based on the GSI system. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **1**:849–857.
- Vásárhelyi B.; Deli Á.; Gálos M. & Ván P. 2000. *Relationship between the critical dissipated energy per unit volume and the mechanical properties of different rocks*. In: J. Girard; M. Liebman; C. Breeds & T. Doe (eds.) ‘Pacific Rocks 2000’, Proc. 4<sup>th</sup> NARMS, Seattle, 1289–1293, Balkema.
- Ván P. & Asszonyi Cs., *Az általános törvényszerűségek*, In. szerk. Asszonyi Csaba, *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye* II. fejezet, 25-87 o., Műegyetemi Kiadó, Budapest, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 3. kötet.
- Ván P. & Vásárhelyi B. 2001. *Second Law of thermodynamics and the failure of rock materials*. In D. Elsworth, J.P. Tinucci & K.A. Heasley (eds.) *Rock Mechanics in the National Interest* 767-773, Balkema Publ.
- Ván P. 2001. Internal thermodynamic variables and the failure of microcracked materials, *J. of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **26**(2): 167-189.
- Verhás J. 1985. *Termodinamika és reológia*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Yudhbir, R.K., Lemanza, W., & Prinzl, F. 1983: *An empirical failure criterion for rock masses*. Proc. 5<sup>th</sup> ISRM Cong. Melbourne, **1**: B1-B8.
- Zhang, L. & Einstein, H.H. 2004. Using RQD to estimate the deformation modulus of rock masses. *Int. J. of Rock Mech. & Mining Sci.* **41**: 337–341.
- Zhang, Lianyang, 2005. *Engineering Properties of Rocks*, Elsevier, Geo-Engineering Book Series V4.

## VÉGES RUGALMAS ÉS KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓK LEÍRÁSA

*Fülöp Tamás*

KFKI, RMKI, ELMÉLETI FIZIKAI FŐOSZTÁLY, BUDAPEST  
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

*Ván Péter*

KFKI, RMKI, ELMÉLETI FIZIKAI FŐOSZTÁLY, BUDAPEST  
BME, ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST  
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

*A szilárd közegek véges rugalmas és képlékeny deformációinak máig ismert leírásai számos fizikai szempontból nem kielégítőek (sőt, nem elfogadhatóak). E tanulságokat leszűrve, jelen írás egy olyan tárgyalásmódot épít ki, amely mentes mindezekről a problémáktól.*

### 1. ELŐSZÓ

A kontinuumfizika (termodinamikával egyesített kontinuummechanika) időderiváltakat is tartalmazó rugalmas és képlékenységi konstitúciós összefüggéseire („anyagtvényeihez”) szükség van a rugalmas és a képlékeny alakváltozás *időbeliségének* kielégítő leírására. Ezek az időbeli folyamatok olyanok is lehetnek, melyek során véges (azaz nem-kicsi<sup>1</sup>) alakváltozások lépnek föl. Emellett mind az idő-, mind a térderiváltas konstitúciós összefüggések igénylik az anyagi objektivitás elvének (a vonatkoztatási rendszertől, téridő-megfigyelőtől független leírás) biztosítását. Ezek a szempontok indokolják, hogy ebben az, idő- és térderiváltas anyagtvényekről szóló kötetben egy kontinuumkinematikai írás is helyet kap: egy olyan írás, mely ezeket a szempontokat kívánja megvalósítani, biztosítani, és így alapul szolgálni az idő- és térderiváltakat tartalmazó konstitúciós összefüggések témakörének jövőbeli fejlődéséhez.

Az itt ismertetett megközelítés előfutára a [FÜLÖP (2008b)] munka, amely problémákat fogalmazott meg a közegkinematika szokásos leírásával kapcsolatban, lefektette

<sup>1</sup> nem „végtelen kicsi”, nem „infinitezimálisnak tekinthető”

azokat az alapelveket, amelyek mentén ezek a problémák elkerülhetők, és ismertetett két olyan deformációtenzor-jelöltet, melyek eme elvek fényében különösen egyszerű definícióval rendelkeznek.

Az ott megkezdett munka folytatódik itt. A felállított alapelvek további elemzésével ugyanis az ott bemutatottakon is túlmenően, lényegében egyértelműre szűkíthető a rugalmas alak- és deformáltságtenzor definíciója. Emellett a képlékeny alakváltozások — mégpedig a véges, azaz nem feltétlenül kicsi képlékeny alakváltozások — minden ismert szempontnak megfelelő kinematikai tárgyalása is kiadódik, teljes szerves összhangban a rugalmas folyamatok kinematikai jellemzésével.

Az új eredmények egy része a 2009-es lisszaboni ESMC2009 konferencián (7. EUROMECH Szilárdtestmechanikai Konferencia) is bemutatásra került [FÜLÖP-VÁN (2009)], a többi — köztük a képlékenyedésre vonatkozó összes — itt mutatkozik be először.

## 2. BEVEZETÉS

A kontinuumok fizikai leírása a kontinuumok mozgásának leírásával, a kinematikával kezdődik. Ennek megfelelően a terület rengeteg művelője foglalkozott már a „véges” (azaz nem feltétlenül kicsi) alakváltozások mennyiségi jellemzésével, és számos javaslat született a rugalmas alakváltozási tenzor<sup>2</sup> és a deformációtenzor<sup>3</sup> definíciójára. Első látásra az a kérdés merül fel, hogy van-e még kutatnivaló ezen a területen, nem elegendő-e egyszerűen fellapozni az irodalmat.

Második ránézésre már kevésbé kielégítő a helyzet. A bőség zavarában találjuk magunkat: túl sok a definíció, és túl kevés hozzá az instrukció, hogy miért van ennyi, és hogy melyiket használjuk, vagy hogy melyiket mikor használjuk.

Még közelebbről szemlélve pedig problémákat is felfedezhetünk e definíciókkal kapcsolatban is, és a közegkinematika más pontjain is. Így például a képlékeny alakváltozások leírása a rugalmas esetnél is kevésbé kielégítőnek bizonyul. Kiderül tehát, hogy van még teendő — mégpedig nem bizonyos „akadémikus” szempontok miatt, hanem a közegek mozgásának és az ahhoz kapcsolódó dinamikai jelenségeknek a fizikai inkonzisztenciáktól mentes leírása érdekében. Annál is szükségesebb ez, mert ha a kinematika fizikai hibákat hordoz, akkor azok mind öröklődnek a kontinuumfizika összes többi részére, melyek mint felépítmények alapoznak a kinematikára.

<sup>2</sup>Ez alatt jelen írás olyan mennyiséget fog érteni, mely deformálatlan állapotban az egységtenzor. Angolul *deformation tensor*.

<sup>3</sup>mely deformálatlan állapotban nulla; angolul *strain tensor*

### 3. A KÖZEGKINEMATIKA SZOKÁSOS TÁRGYALÁSA

Hogy lássuk, mik azok a problémák és fizikai inkonzisztenciák, amik a közegkinematika tipikus tárgyalásában felmerülnek, tekintsük át a számos tankönyvben, szakönyvben és enciklopédiában megtalálható szokásos megközelítést. (Bizonyos művek, pl. [TRUESDELL–NOLL (1965)], [HAUPT (2002)], tartalmazznak ehhez képest néhány előrelépést, de a problémák zöme ezeknél a tárgyalásoknál is fennmarad, illetve pusztán átfogalmazódik. Ezért az alábbiak nem térnek ki az összes ismeretes változatra.)

A szokásos tárgyalás szerint tehát nulladik lépésben választanak egy inerciális vonatkoztatási rendszert, egy időorigót, és az inerciarendszer terében egy térorigót. Ez a lépés azért nevezhető nulladiknak, mert általában hallgatólagosan történik, nem fogalmazzák meg expliciten. Ezután választanak egy  $t_0$  referencia-időpontot, a közeg akkori állapotát nevezik ki referencia-állapotnak (referencia-konfigurációnak), és ezután minden egyes anyagi pontot azzal jellemeznek-indexelnek, hogy  $t_0$ -kor mely  $\mathbf{X}$  helyvektorú helyen járt.

A  $t_0$ -kor  $\mathbf{X}$ -ben járt közegpont  $t$ -kor az

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X}) \quad (1)$$

helyen jár, így

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{X}) = \boldsymbol{\chi}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{X} \quad (2)$$

az elmozdulása  $t_0$  óta. Sebességét

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{X}) = \dot{\boldsymbol{\chi}}(t, \mathbf{X}) = \dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{X}) \quad (3)$$

adja meg, ahol a felülpont a szubsztanciális időderiváltat jelenti, mely az  $\mathbf{X}$  „anyagi helyváltozó” használata esetén egyszerűen a  $\partial_t|_{\mathbf{X}}$  parciális időderivált.

Bevezetik ezután, a  $\boldsymbol{\chi}$  mozgásfüggvény illetve az  $\mathbf{u}$  elmozdulásfüggvény térderiváltjaként az

$$\mathbf{F} := \boldsymbol{\chi} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{I} + \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} \quad (4)$$

ún. mozgásgradienst vagy elmozdulásgradienst, melyre definíciója következményeként teljesül

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} \quad \text{és} \quad (\mathbf{F} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^{A_{2,3}} = \mathbf{0}; \quad (5)$$

itt  $\nabla_{\mathbf{x}}$  a  $\partial_{\mathbf{x}}$  anyagi térderiváltat,  $\nabla_{\mathbf{X}}$  pedig a  $\partial_{\mathbf{X}}$  inerciális térderiváltat jelöli, melyek a helyes tenzoriális sorrend („indexsorrend”) érdekében kontextustól függően hatnak balra ( $\overleftarrow{\nabla}$ ) illetve jobbra ( $\overrightarrow{\nabla}$ ) [kérdéses esetekben a kontextust zárójelezés fogja egyértelműsíteni],

⊗ a diadikus vagy tenzorszorzat jele<sup>4</sup>, végül <sup>A</sup> a tenzorok antiszimmetrikus részét jelöli [a szimmetrikus részt pedig <sup>S</sup>, továbbá <sup>T</sup> a transzponálást; többindexes tenzornál pedig pl. <sup>A<sub>2,3</sub></sup> a második és harmadik „indexben” vett antiszimmetrizáltat, mely indexesen pl.  $\frac{1}{2}(C_{ijk} - C_{ikj})$ ].

A következő lépés az, hogy tekintik a — nemnulla determinánsú tenzorokra egyértelmű — bal ill. jobb CAUCHY-dekompozíciót (poláris felbontást):

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}_L \mathbf{O} = \mathbf{O} \mathbf{U}_R, \quad (6)$$

ahol  $\mathbf{O}$  ortogonális,  $\mathbf{U}_L := \sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^T}$  és  $\mathbf{U}_R := \sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}}$  pedig szimmetrikus, pozitív definit tenzorok<sup>5</sup>.

Ezek segítségével definiálják, különböző valós  $n$  hatványkitevőkkel, a különböző (CAUCHY-GREEN, FINGER, ...) bal és jobb alakváltozási tenzorokat:

$$\mathbf{C}_L^{(n)} := (\mathbf{U}_L)^n, \quad \mathbf{C}_R^{(n)} := (\mathbf{U}_R)^n. \quad (7)$$

Azokból pedig a különböző (GREEN-LAGRANGE, ST. VENANT, BIOT, ALMANSI, HENCKY, ...) deformációtenzorokat vezetik be:

$$\mathbf{E}_L^{(n)} := \frac{1}{n} [\mathbf{C}_L^{(n)} - \mathbf{I}] = \frac{1}{n} [(\mathbf{U}_L)^n - \mathbf{I}], \quad \mathbf{E}_L^{(0)} := \ln \mathbf{U}_L, \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_R^{(n)} := \frac{1}{n} [\mathbf{C}_R^{(n)} - \mathbf{I}] = \frac{1}{n} [(\mathbf{U}_R)^n - \mathbf{I}], \quad \mathbf{E}_R^{(0)} := \ln \mathbf{U}_R \quad (9)$$

(az  $n = 0$  eset, a HENCKY-féle vagy „természetes” deformációtenzor<sup>6</sup> az  $n \neq 0$  esetek természetes folytatásaként, azaz  $n \rightarrow 0$  határátmenetként a L’HOSPITAL-szabállyal származtatható). A kis deformációkra használt CAUCHY-deformációtenzor pedig

$$\mathbf{E}^{\text{CAUCHY}} := \mathbf{F}^S - \mathbf{I} = (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^S. \quad (10)$$

Ennek a deformációtenzornak egyébként bevezethető az a változata is, amelyben az anyagi  $\nabla_{\mathbf{x}}$  helyett az inerciális  $\nabla_{\mathbf{x}}$  áll:

$$\mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}} := (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^S. \quad (11)$$

A  $\nabla_{\mathbf{x}}$  típusú és a  $\nabla_{\mathbf{x}}$  típusú térderivált érték az  $\mathbf{F}$  szorzóval számítható át egymásba, mely kis alakváltozások során körülbelül az  $\mathbf{I}$  egységtenzor, ezért kis deformációkra e

<sup>4</sup> A magyar irodalomban szintén gyakori o jelen írásban a függvénykompozíciót (összetett függvényt) kell jelölje.

<sup>5</sup> A bal és a jobb oldali felbontásban fellépő ortogonális tenzorok egyenlőnek bizonyulnak, ezért jelölhetjük őket a közös  $\mathbf{O}$  módon.  $\mathbf{U}_L^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  illetve  $\mathbf{U}_R^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$  determinánsát véve könnyen belátható, hogy  $\det \mathbf{U}_L = \det \mathbf{U}_R = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}^T$ .

<sup>6</sup> Egy pozitív sajátértékekkel rendelkező szimmetrikus tenzor logaritmususa az a tenzor, melynek sajátvektorai megegyeznek az eredeti tenzoréval, a sajátértékei pedig az eredeti sajátértékek logaritmusai. Vagyis a főtengeleyrendszerben a főátlóbeli elemeket a logaritmusukkal helyettesítjük.

két deformáció-változat vezető rendben megegyezik. Utóbbi azért viselheti az »inerciális CAUCHY« nevet, mert mindkét „tenzori indexében” (tenzori komponensében) inerciális vektori típusú, hiszen  $\mathbf{v}$  is inerciális vektor, és  $\nabla_{\mathbf{x}}$  is inerciális vektori értékű derivált.  $\mathbf{E}^{\text{CAUCHY}}$  viszont olyan „hibrid”, amely részben inerciális, részben viszont anyagi vektori típusú. Emiatt az  $\mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}}$  változat konzisztensebbnek tűnik. (Ez a megítélés később fokozatosan egyre megalapozottabbá fog válni.) A CAUCHY-deformációtenzor (mindkettő) szimmetrikus, sajátirányai vannak, sajátértékei pedig e főirányokba történő relatív megnyúlásokat adják meg (amint az geometriailag megállapítható). A többi deformációtenzor pedig mind úgy van kialakítva, hogy szintén szimmetrikusak legyenek, és kis alakváltozásokra — amikor is  $\mathbf{F} \approx \mathbf{I}$ , — vezető rendben megegyezzenek a CAUCHY-deformációtenzorral (vagyis mindkét változattal).

#### 4. A KÖZEGKINEMATIKA SZOKÁSOS TÁRGYALÁSÁNAK PROBLÉMÁI

##### 4.1. TÚL SOK DEFORMÁCIÓ-JELÖLT

Láthatjuk tehát, hogy tulajdonképpen végtelen sok alakváltozás- és deformációtenzor kerül bevezetésre. Ráadásul, egy kis többlet fantáziával a

$$\frac{1}{2} \left( \mathbf{E}_L^{(n)} + \mathbf{E}_L^{(-n)} \right), \quad \frac{1}{2} \left( \mathbf{E}_R^{(n)} + \mathbf{E}_R^{(-n)} \right) \quad (12)$$

további jelöltek is természetesnek tűnnek. Megállapíthatjuk továbbá, hogy az  $\mathbf{F} = \mathbf{U}_L \mathbf{O}$  felbontás egy olyan jelentést hordoz, miszerint a közeg (egy kis helyi darabkája) először csak fordul ( $\mathbf{O}$ ), utána pedig csak tágul és torzul ( $\mathbf{U}_L$ ). A másik felbontás pedig a fordított értelmezés: először történik tágulás és torzulás ( $\mathbf{U}_R$ ), utána pedig csak elfordulás ( $\mathbf{O}$ ). Valójában azonban helyesebbnek tűnik az a felfogás, hogy a kettő egyszerre történik minden egyes pillanatban. Ezért nemcsak igazságosabbnak, de helyénvalóbbnak is tűnnek például az

$$\frac{1}{2} \left( \mathbf{E}_L^{(n)} + \mathbf{E}_R^{(n)} \right) \quad (13)$$

jelöltek. Vagy, ha belátható lenne, hogy léteznek „közbülső” poláris dekompozíciók is, pl.

$$\frac{1}{2} (\mathbf{U}_1 \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_1 \mathbf{U}_1), \quad \sqrt{\mathbf{O}_2} \mathbf{U}_2 \sqrt{\mathbf{O}_2} \quad \text{vagy} \quad \sqrt{\mathbf{U}_3} \mathbf{O}_3 \sqrt{\mathbf{U}_3}, \quad (14)$$

akkor ezekre is támaszkodhatnánk.<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Még igazságosabbnak tűnik a kicsiny időtartamok alatti kicsiny elfordulásokat valahogy felintegrálni. Látni fogjuk azonban, hogy az elfordulás általános közegmozgások esetén csak egy korlátozott mértékben értelmezhető, ezért ezt az elgondolást sem érdemes erőltetni.



Más szempontból viszont nem tűnik egyenértékűnek a bal és a jobb lehetőség. Egy egyszerű szemléltetésként, ha az egyszerű nyírás<sup>8</sup> speciális példáját tekintjük<sup>9</sup>, akkor  $\mathbf{U}_L$  (és így a hatványai, és a belőle képezett bal deformációtenzorok) főirányai a szemléletesen várt irányba forognak, egyre lassuló módon; az egyik sajátirány a nyírás irányához tart, egyre növekvő, „nyúló” sajátértékkel, a másik pedig egyre kisebb, „rövidülő” sajátértékkel. A jobb tenzorok ( $\mathbf{U}_R$  és függvényei) sajátirányai viszont természetellenesen, visszafelé irányba forognak (szintén lassuló, és „nyúló/rövidülő” módon). A visszafele forgás azzal magyarázható, hogy a jobb tenzorok az anyaghoz rögzített irányokhoz viszonyítanak — míg a bal tenzorok az inerciális térirányokhoz —, és kiderül, hogy az anyaghoz rögzített irányok az inerciarendszerből nézve gyorsabban forognak, mint a főirányok, ezért látszik az anyagi irányokhoz képest visszafele forgás. (A főirányok forgása és nyúlása-rövidülése egyébként egyezőként bizonyul egy anyagi gömböcskének a nyírás hatására ellipszoiddá váló torzulását jellemző főtengety-forgással és -nyúlással-rövidüléssel.) Ez a példa tehát különbséget jelez a bal és a jobb tenzorok között: egyrészt hogy eltérő irányviszonyokhoz mérnek, másrészt hogy a bal tenzorok viselkedése szemléletesebb, könnyebben átlátható, mint a jobb tenzoroké. Ebből a szempontból viszont akkor hiba volna ezek valamilyen igazságos átlagát, köztes kompromisszumát keresni annak kifejezésére, hogy valójában egyszerre történik elfordulás és nyúlás+torzulás. No de akkor mitévők legyünk?

A végtelen sok deformációtenzor-jelölt láttán pedig joggal merül fel bennünk a kérdés: akkor melyiket rakjuk például egy rugalmasságtani konstitúciós összefüggésbe? (Pl. melyikben a leg-HOOKE-szerűbb egy anyag?<sup>10</sup>) Gyakorlati tapasztalatok is arra mutatnak, hogy ez a választás egy fontos kérdés: amikor például egy határozottan nemlineáris rugalmasságú közegre fölvetett kísérleti adatokból a nemlineáris MURNAGHAN-modell szerinti anyagi együtthatókat kívánják meghatározni, az  $\mathbf{E}_R^{(2)}$  deformációtenzor feltételezése esetén irreálisztikus, és óriási hibával terhelt értékeket kapnak, míg az  $\mathbf{E}_R^{(0)}$  választás esetén sokkal megbízhatóbb eredmények adódnak [PLEŠEK–KRUIŠOVÁ (2006)], [KRUIŠOVÁ–PLEŠEK (2007)].

#### 4.2. A SZINGULÁRIS HATÁRESETEK LEÍRÁSA

Furcsa továbbá, hogy a pozitív  $n$ -ű  $\mathbf{E}_L^{(n)}$ ,  $\mathbf{E}_R^{(n)}$ -ek végtelenül összenyomott anyagra (azaz a  $\det \mathbf{F} \rightarrow 0$  határesetben) véges értéket vesznek fel. A negatív  $n$ -űek ellenben a végtelen kitérő (  $\det \mathbf{F} \rightarrow \infty$  ) határesetében maradnak végesek. Kifejezőbbnek tűnik egy olyan geometriai mennyiség, amely mindkét ilyen szinguláris határesetben divergál. Az elvi kifejezőerő mellett az alkalmazásokban fontos numerikus stabilitás is az ilyen

<sup>8</sup>  $v_x := cy$ ,  $v_y := 0$ ,  $v_z := 0$  alakban megadható sebességmező (inerciális helykoordinátákban)

<sup>9</sup> a számolási részleteket mellőzve

<sup>10</sup>Értsd: melyikben a leglineárisabb a rugalmasságtani konstitúciós összefüggés?

mennyiségektől várható. Ilyen szempontból az  $n = 0$ -jú deformációtenzorok tűnnek jó választásnak [de ilyen tulajdonságúak például a (12)-féle kombinációk is, tetszőleges  $n$ -re]. Az imént említett [PLEŠEK–KRUIŠOVÁ (2006)], [KRUIŠOVÁ–PLEŠEK (2007)] eredmények is rögtön illusztrálják ennek az aspektusnak a fontosságát, és hogy például az  $n = 0$  választás valóban jobban teljesít ilyen szempontból.

Érdeemes egyébként itt feltenni a következő kérdést is. A kis deformációkra használható CAUCHY-tenzor rendelkezik azzal a — fizikai értelmezéshez és alkalmazáshoz egyaránt értékes — tulajdonsággal, hogy a gömbi része írja le a deformálódás térfogatváltozási részét<sup>11</sup>, a deviatorikus része pedig az állandó térfogatú részét. Ismeretes-e, vagy legalábbis létezik-e olyan véges deformációs deformációtenzor-fajta, amely szintén ilyen tulajdonságú, tehát nem-kicsi deformációkra is egzaktul átörökíti ezt az értékes viselkedést? A válasz az, hogy igen, mégpedig az  $n = 0$ -jú, azaz HENCKY-féle deformációtenzorok ilyen tulajdonságúak. Ez a következőképpen mutatható meg.

Tekintsünk egy, pozitív  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sajátértékekkel rendelkező szimmetrikus  $\mathbf{\Lambda}$  tenzort. Ennek determinánisa a sajátértékek szorzata, melyre

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = e^{\ln(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)} = e^{\ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \ln \lambda_3}, \quad (15)$$

tehát a 6. lábjegyzet fényében

$$\det \mathbf{\Lambda} = e^{\text{tr} \ln \mathbf{\Lambda}}, \quad \text{azaz átrendezett alakban} \quad \text{tr} \ln \mathbf{\Lambda} = \ln \det \mathbf{\Lambda}. \quad (16)$$

Mivel pedig a deformálódás térfogatváltozási része a mozgás mint transzformáció JACOBI-determinánisa,

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{U}_L = \det \mathbf{U}_R, \quad (17)$$

így

$$\text{tr} \ln \mathbf{U}_L = \text{tr} \ln \mathbf{U}_R = \ln \det \mathbf{F}. \quad (18)$$

A HENCKY-tenzorok nyoma tehát pontosan akkor nulla, amikor a JACOBI-determináns 1, tehát amikor nincs térfogatváltozás.

### 4.3. AZ ELFORDULÁS JELLEMZÉSE

Visszatérve a gondok áttekintésére, dilemma lép fel az elfordulás jellemzésénél is.  $\mathbf{O}$  merevtestszerű (távolságőrző) mozgás esetén valóban az elfordulást írja le, és általában is egy ortogonális tenzor, és így

$$\dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^{-1} \quad (19)$$

<sup>11</sup> Ezért szokás a tenzorok gömbi részét térfogati résznek is nevezni.

is egy matematikailag kielégítőnek tűnő (mert antiszimmetrikus) szögsebesség-jelölt. Ha azonban veszünk  $t_0$ ,  $t_1$  és  $t_2$  időpillanatokot, és az egyes időintervallumokhoz rendelhető  $\mathbf{F}_{[t_0,t_1]}$ ,  $\mathbf{F}_{[t_1,t_2]}$  és  $\mathbf{F}_{[t_0,t_2]}$  mozgásgradienseket, akkor a hozzájuk tartozó  $\mathbf{O}_{[t_0,t_1]}$ ,  $\mathbf{O}_{[t_1,t_2]}$  és  $\mathbf{O}_{[t_0,t_2]}$  ortogonális tenzorokra általában

$$\mathbf{O}_{[t_1,t_2]} \mathbf{O}_{[t_0,t_1]} \neq \mathbf{O}_{[t_0,t_2]}, \quad (20)$$

csak merevtestszerű mozgások esetén áll fenn egyenlőség, noha egy elfordulás-fogalomtól ezt általában is elvárnánk. Van emellett egy másik természetes lehetőség is a szögsebesség definiálására:  $(\mathbf{v} \otimes \nabla)^A$ , mely általában nem egyezik meg az előbbivel:

$$\dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^{-1} \neq (\mathbf{v} \otimes \nabla)^A. \quad (21)$$

Mivel  $\mathbf{v} \otimes \nabla$  írja le egy kicsiny  $\Delta t$  időtartam alatti elmozdulások helyi különbözőségét  $[(\mathbf{v} \otimes \nabla) \Delta t]$ , és ezen belül  $(\mathbf{v} \otimes \nabla)^S$  fejezi ki a pillanatnyi relatív tágulásokat és torzulásokat [FÜLÖP (2008b)], ezért hihetőnek tűnik, hogy  $(\mathbf{v} \otimes \nabla)^A$  jellemezze az elfordulást, ő jelentse a közeg szögsebességét. Sajnos, a  $\mathbf{v} \otimes \nabla$  jellemezte változások során egy adott helyen a különböző irányú vektorok általában különböző módon fordulnak el, azaz irányfüggő a szögsebesség [FÜLÖP (2008b)]. Az viszont belátható, hogy a  $(\mathbf{v} \otimes \nabla)^S$  okozta (általában nemnulla és irányfüggő) elfordulás irányokra vett átlaga nulla [ld. ugyanott]. Ezért a maradék,  $(\mathbf{v} \otimes \nabla)^A$  jellemzi az elfordulást, legalábbis az irányokra vett átlag értelmében. Ez tehát a  $(\mathbf{v} \otimes \nabla)^A$  szögsebesség-jelöltet látszik támogatni, míg  $\dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^{-1}$  nem látszik semmi kitüntetett szerepet játszani a pillanatnyi elfordulási sebességek szemszögéből nézve.

Mivel pedig a szögsebességhez is csatolódnak dinamikai jelenségek, ezért a közeg-kinematikában a szögsebesség dilemmáját is fontos feloldani. Sajnos, a jelenlegi tipikus gyakorlat az, hogy vagy csak az egyik, vagy csak a másik szögsebesség-jelöltről tesznek említést, és azt alkalmazzák pl. a közeggel együttforgó időderivált értelmezésére.

#### 4.4. A REFERENCIA-IDŐPONT

Gond van aztán a  $t_0$  referencia-időponttal is. Mint láthattuk, az alakváltozást jellemző tenzorok definiálásához szükséges volt egy ilyen időpillanatot választani. Elvi szempontból azonban nem jogos ez a lépés, mert az idő homogén, minden időpillanat egyenértékű, ezért egyikük sem játszhat kitüntetett szerepet a mozgásjellemzők leírásában.

A  $t_0$  referencia-időpont azonban nemcsak az idő homogenitása miatt problémás, hanem a hozzá kapcsolt fizikai szerep szempontjából is. A szokásos kinematika-tárgyalás ugyanis a közeg  $t_0$ -kori állapotát egy referencia-állapotnak tekinti. A deformációtensor  $t_0$ -kori értéke pedig definíció szerint nulla, legyen az a definíció a fenti végtelen sok lehetőség bármelyike, mert mindegyik a mozgásgradiens egységtenzortól vett eltérését méri

valahogy, a mozgásgradiens pedig  $t_0$ -kor definíció szerint az egységtenzor. Márpedig a deformációtenzor nem azért kell nekünk, mert a mozgást szeretnénk jellemezni vele — arra a célra nem is lehetne kielégítő, mert egy tetszőleges merevtestszerű mozgáskor nulla kell legyen. Arra kívánjuk használni, hogy a szilárd közegekben ébredő rugalmas (és esetleges más) erőket leíró konstitúciós összefüggésekben szerepeljen, a közeg kinematikai állapotának jellemzésére. Egy tartósan magára hagyott, zavartalan, teljesen relaxált szilárd közeg ugyanis egy bizonyos meghatározott alakot vesz föl. Egy kristályos anyag például a szabályos kristályszerkezetet veszi föl, a hozzá tartozó szabályos rácsávolságokkal és szimmetriákkal. Ez a geometriai elrendeződés a szilárd közeg természetes, kitüntetett, ideális állapota. Ha ettől eltérő alakviszonyok közé kényszerítjük, rugalmas (és esetleg más) erők ébrednek benne, és a konstitúciós relációk feladata eme erők megadása az ideálistól eltérő geometriai állapot függvényében. A deformációtenzortól elvárt fizikai szerep tehát az, hogy a geometriai állapotnak az ideálistól, kitüntetettől, alapállapottól vett eltérését mérje. A szilárd közeg deformáltságát (tágultságát és torzultságát) kell mérje, mely természetesen az ideális alak elrendeződéshez képest értendő.

Mit tesz ezzel szemben a szokásos deformációtenzor-definíciók mindegyike: a  $t_0$ -kori állapotól vett eltérést, az azóta bekövetkezett változást méri. Mikor esik egybe a deformáltság változása a deformáltsággal: ha  $t_0$ -kor a közeg deformálatlan volt. Ez azonban általában nem teljesül. Példaként, talaj- és kőzetmechanikai laboratóriumi próbatestekre többnyire teljesül. Mélyépítési szituációkban (alagútnyitás talajban, stb.) pedig általában nem, mert a talaj vagy kőzet egy, az önsúly és más földtani viszonyok által terhelt állapotból indul. Egy általánosan érvényes leírás tehát nem alapozhat egy referencia-időpontra.

Általánosan a helyzet az, hogy a közeg egy adott deformáltságú kezdeti feltételből indul, és további mozgása a deformáltság *időfejlődését* szabja meg.<sup>12</sup> A deformációtenzor definíciójának kérdése tehát az a kérdés kell legyen, hogy a deformáltság változási gyorsaságát hogyan szabja meg a közeg mozgása. A kezdeti feltételt pedig a gyakorlatban például az ismert kezdeti feszültségből (pl. önsúly által nyomott talaj, vagy *in situ* kimért kezdeti feszültségeloszlás) és a közeg ismert konstitúciós összefüggéséből határozhatjuk meg.

Hogy a deformáltság változási gyorsaságát mi szabja meg, arra a (hamarosan részletezésre kerülő inerciális követelményeket is kielégítő)  $\mathbf{v} \otimes \nabla_x$  ígérkezik ésszerű jelöltnek.<sup>13</sup>

A deformációtenzor fejlődési egyenlettel történő értelmezési módja egy egyszerű példán máris bemutatható: a CAUCHY-deformációtenzor a hagyományos (10) értelmezés,

<sup>12</sup> Ez a séma pedig ugyanaz, ami általában minden mező jellegű mennyiségre fenn szokott állni: az időbeli változást valamilyen fejlődési egyenlet határozza meg, és emellé kezdeti feltételt kell megadni.

<sup>13</sup> Ezen belül  $\mathbf{v} \otimes \nabla_x$  szimmetrikus és antiszimmetrikus része esetleg külön-külön is szerepet játszhat, mégpedig különbözőt — ilyenre mindjárt látni is fogunk példát.

megismételve az

$$\mathbf{E}^{\text{CAUCHY}} := (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^S \quad (22)$$

definíció helyett ezentúl az

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{CAUCHY}} = (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^S \quad (23)$$

időbeli fejlődési egyenlettel definiálandó, mely differenciálegyenletnek a megoldását egy

$$\mathbf{E}^{\text{CAUCHY}}(t_0) = \mathbf{E}_0 \quad (24)$$

kezdeti feltétellel rögzíthetjük. A (11) inerciális változat fejlődési egyenlete pedig

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{in. CAUCHY}} = (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^S. \quad (25)$$

A fejlődési egyenletes felfogás egyébként rögtön új, természetes és egyszerű jelölteket is javasol a deformáció jellemzésére. Ezek egyike a

$$\overset{\circ}{\mathbf{E}}^{\text{co-rotating}} = (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^S \quad (26)$$

fejlődési egyenletű deformációtenzor<sup>14</sup>, ahol  $\overset{\circ}{\phantom{\mathbf{E}}}$  a  $(\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^A$  szögsebesség-definíciót használó JAUMANN-féle együttforgó időderivált, amelynek definíciója

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} := \dot{\mathbf{T}} - (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^A \mathbf{T} + \mathbf{T} (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^A. \quad (27)$$

Ezt az együttforgós deformáció-definíciót az az elgondolás veti föl, hogy egy merevtest-szerű forgásnak nem szabad változtatnia a deformációt. Az  $\overset{\circ}{\mathbf{E}}^{\text{co-rotating}}$  deformációtenzor tulajdonságairól részletesen lásd [FÜLÖP (2008b)].

Emellett érdemes kiszámolni a többi ismert deformációtenzor fejlődési egyenletét is. Technikai okokból (mivel egy tenzor általában nem cserélhető fel az időderiváltjával) bizonyos alakváltozási tenzorok, a bal és jobb CAUCHY-GREEN-tenzorok időderiváltját sikerül kiszámolni:

$$(\mathbf{U}_L^2)^\dot{=} = (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{U}_L^2 + \mathbf{U}_L^2 (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^T, \quad (28)$$

mely egyenlet más alakban (észrevéve, hogy egy JAUMANN-derivált is kialakítható):

$$(\mathbf{U}_L^2)^\circ{=} = (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^S \mathbf{U}_L^2 + \mathbf{U}_L^2 (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^S. \quad (29)$$

Másrészt

$$(\mathbf{U}_R^2)^\dot{=} = 2\mathbf{F}^T (\mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^S \mathbf{F}. \quad (30)$$

Ezeknek a fejlődési egyenleteknek a későbbiekben hasznát fogjuk látni.

<sup>14</sup> co-rotating = együttforgó (angol)

#### 4.5. AZ ANYAGI SOKASÁG SZERKEZETE

A referencia-időponthoz és referencia-konfigurációhoz kapcsolódik az a probléma is, hogy magát a közeget, az ún. anyagi sokaságot a szokásos leírásban a referencia-konfiguráció reprezentálja. (Fejlettebb tárgyalások, pl. [TRUESDELL–NOLL (1965)], [HAUPT (2002)] formilag valamennyire máshogy járnak el, de az elkövetett fizikai hibák lényegében ugyanazok.) Láttuk ugyanis, hogy általában nem létezik olyan időpont, amikor a közeg minden pontban az ideális, természetes, magára hagyott állapotában van (pl. önsúly és egyéb körülmények miatt), ezért egy referencia-időpontbeli állapot, elrendezés nem használható fel a közeg tulajdonságainak fizikailag helytálló jellemzésére. Mégpedig nemcsak a referencia-időpontbeli deformáltság nemnulla általában, hanem az akkori irányviszonyok sem a közeg természetes, zavartalan állapotbeli irányviszonyai. Ezért a vektorok, tenzorok referencia-irányviszonyok szerinti kifejtése sem hordoz semmi kitüntetett fizikai jelentést, sőt, épp félrevezető/téves lehet.

Egy szilárd közegnek létezik egy természetes, saját szerkezete: az az elrendeződés, azok a távolság- és irányviszonyok, amiket a természetes, teljesen zavartalan állapotában felvesz. Ahogy a közeg kirúgja magát, két különböző közegpont távolsága egy jól meghatározott érték lesz, ahogy az is meghatározott lesz, hogy mely közegpontok esnek egy egyenesbe, és hogy egy közegpontok alkotta háromszögnek mekkorák lesznek a szögei, stb. A szilárd közegnek ez a saját természetes szerkezete egy fontos tulajdonsága, ezért fontos, hogy hűen legyen leírva, nem pedig egy fizikailag általában nem helytálló módon (a referencia-konfigurációval történő reprezentálás pedig általában nem helytálló).

Ezzel ellentétben, folyadékoknál és gázoknál más a helyzet: náluk nem kapcsolódik fizika a deformációhoz mint tenzormennyiséghez. Folyadékoknál egy skalár mennyiséghez, a tágultsághoz tud kapcsolódni, ahol a tágultság az a mérőszám, hogy egy elemi anyagtartományocskára pillanatnyi térfogata ( $V$ ) mennyivel nagyobb a természetes, zavartalan, ideálisan békénhagyott állapotbeli térfogatánál ( $V_0$ ), viszonyítva ehhez a nyugalmi térfogatértékhez ( $\frac{V-V_0}{V_0}$ ). A tágultsághoz várhatóan rugalmas energia kötődik, mely az alapállapotban, azaz 0 tágultságérték esetén nulla, ettől bármelyik irányba kitérve a rugalmas energia — és így a visszatéríteni kívánó rugalmas feszültség nagysága — nő. Mi több, a nyugalmi térfogati állapot olyannyira kitüntetett, hogy a folyadékokat sokszor összenyomhatatlannak veszik. Torzulási szempontból viszont minden konfiguráció egyenértékű. Gázok esetén viszont a tágultságnak sincs értelme, mert egy gáz annyira tágul ki, amennyire csak hagyják, nincs egy nemnulla természetes anyagsűrűsége, amire beszabályozná magát (úgymond  $V_0 = \infty$ ).

Hibája tehát a szokásos közegkinematikának az is, hogy nem tesz különbséget aszerint, hogy milyen típusú közegről beszél, miközben pedig függ ettől, hogy mik a releváns kinematikai jellemzői.

#### 4.6. A KÉPLÉKENY DEFORMÁCIÓ

Tekintsünk most rá a képlékeny alakváltozással is járó kontinuumfolyamatok leírására. Itt az egyik szokásos megközelítés az, hogy egy össz-deformációt tekintenek, mint egy rugalmas deformáció és egy képlékeny deformáció összegét. A rugalmas tagot rugalmas konstitúciós összefüggés változójaként használják, a képlékeny deformáció értékét pedig szintén egy állapotjelzőnek tekintik, és szerepeltetik képlékeny és termodinamikai potenciálok változójaként.

Mint azt az imént már láttuk, a szokásosan értelmezett deformációtenzor-típusok nem állapotjelzők, nem a pillanatnyi *fizikai állapotot* jellemzik, hanem *változást* mérnek — a referencia-időpontbeli viszonyokhoz képest. A rugalmas deformáció fogalma azonban feljavítható volt a rugalmas deformáltság fogalmára, mely már *állapotot* jellemez: a pillanatnyi kitérést a szilárd közeg természetes saját szerkezetéhez képest. Más viszont a helyzet a képlékeny deformációval.

Nézzünk egy egyszerű (sőt, leegyszerűsített, csak a számunkra lényeges momentumokat hangsúlyozó) példát. Az acélöntődobában a csapolás után az acél megdermed. A kapott acéltömböt átvezetik egy hengerpár között, amellyel laposabbra nyújtják, azaz képlék. A hengerpár után megy tovább, (lényegében) békén hagyottan (csak görgőkön dökög tovább). Ezután átvezetik egy második, egymáshoz közelebbi hengerpár között, amellyel megint valamennyivel laposabbra alakítják. Ezután megint mehet tovább egy szakaszon békén hagyottan. Aztán megint tovább lapítja egy hengerpár. És így tovább: a végén egy lapos acéllemez jön ki. Ezt teherautóra rakják, és elszállítják egy lemezfeldolgozó üzembe.

Kijelölhető-e fizikailag egy olyan természetes nullhelyzet, amitől vett eltérést fejezzen ki a képlékeny deformáció? A mikori elrendezése lenne tekinthető az „igazi saját-elrendezésének”? A dermedés utáni? Az első hengerpár utáni? Az ötödik utáni? A lemezfeldolgozó üzembe érkező? (Vegyük észre, hogy a lemezfeldolgozóban dolgozó munkások számára az üzembe beérkezéskori állapot a „kezdeti”...) Az első hengerpár utáni és második előtti, lényegében békén hagyott szakaszon csak egy kicsike terhelés éri az acélt, ahogy a továbbító görgőkön zötyög és a saját súlya miatt egy kicsikét behorpad: ez rugalmas behorpadás, mely az első hengerpár után allandósult alapelrendeződésétől vett eltérés. Ha itt befejeznénk a folyamatot, ez az alapszerkezet maradna meg az acélnek. Ám jön a második hengerpár, elváltoztatja ezt az alapelrendeződést, átrendezi a közeget, aztán a következő hengerpárig ismét nincs változás az alapelrendeződésben, csak esetleg kicsike rugalmas kitérések a görgőkön az új, szintén allandósult alapelrendeződéshez képest. A második alapelrendeződés ugyanolyan legitim, mint az első, és minden további képlés utáni állapot úgyszintén. Egyikük sem kitüntetettebb a többinél. A képlékeny deformáció csakis változást tud mérni. Mégpedig mi olyat mérhetne, ami nem valami

önkéntes viszonyítási ponttól mért változás, hanem valami fizikai tartalmi dolog változása: az *alapszerkezet megváltozását* mérhetné. Az alaprendeződés megváltozását egy  $t_1$  és egy  $t_2$  időpont között. Olyan mennyiség, ami nem két, hanem egy időpontra vonatkozik, az alapszerkezet változási gyorsasága, időderiváltja lehet. Ez a képlékenyedési sebesség már állapotjelzőnek tekinthető, és joggal szerepelhet konstitúciós összefüggésekben, termodinamikai potenciálokban. (Természetesen egyelőre még nem tudjuk, hogy az alapszerkezetet pontosan milyen matematikai módon lehetne megadni, így most még nem világos az sem, hogy ez a valami hogyan lenne deriválható idő szerint. A következő szakaszokban fog majd fény derülni a konkrét megvalósítás módjára.)

Megjegyzendő, hogy a képlékeny deformáció bevezetésére létezik egy másik megközelítés is, ahol a mozgásgradienst írják fel rugalmas és képlékeny mozgásgradiens szorzataként. Ez természetesen öröklí a referencia-időponttal és -konfigurációval kapcsolatos ellenvetéseket, és szintén nem észleli a különbséget, hogy a rugalmas deformáltság állapot, míg a képlékeny alakváltozás változás. (További megjegyzéseket is lehetne tenni, de már az eddigiekből is látszik, hogy ez az út sem kielégítő a képlékeny kinematika megnyugtató megfogalmazásához.)

A helyzet jellemzéséül és következmények súlyosságáról érdemes megismételni BERTRAMnak az [ASSZONYI–VÁN–SZARKA (2007)] műben már felidézett sorait:

„A véges képlékenységtelméletek egyik alapvető problémája a belső változók definíciója, és különösen a képlékeny vagy inelasztikus alakváltozásé. Habár a *képlékeny deformáció* kifejezés meglehetősen szokásosnak tűnik a mérnöki irodalomban, kiderül, hogy nagy deformációk esetén meghatározása rendkívül bonyolult.” [BERTRAM (2005), 249. o., kiemelések a szerzőtől].

#### 4.7. A TÉRIDŐ ÁLTAL KIRÓTT KÖVETELMÉNYEK

Az utolsó kritikai észrevételhez idézzük fel a 3. szakasz elején tett nulladik, implicit lépést. Ott tulajdonképpen egy szívességet tettünk a hagyományos tárgyalás számára, azzal, hogy megelőlegeztük, hogy a leírás egy *inerciális* vonatkoztatási rendszer szerint fog történni. Ez ugyanis — a nulladik lépés implicit, sőt, fel nem ismert volta miatt — a szokásos tárgyalásban egyáltalán nincs biztosítva, a formalizmus bármely nem-inerciális (hanem csak merev/távolságtartó, vagy akár még általánosabb) vonatkoztatási rendszer szerint zajlhat. Ezzel viszont a leírás nemcsak a közeg, hanem jókora mértékben eme tetszőleges megfigyelő viselkedését is tartalmazza, és ez a kettő alaposan össze van keveredve. Ez a probléma jó ideje felismerésre is került, és az anyagi objektivitás elvének neveztek el azt a törekvést, hogy a közeg viselkedése és a megfigyelő viselkedése szétválasztható legyen.



Ennek egy lehetséges megvalósításának tekintik az „anyagi sokaságon” dolgozást. Ez azon a felismerésen alapul, hogy a közeg maga is tekinthető egy megfigyelőnek, ezért ha őhozzá viszonyítunk, akkor nem kellett semmi külső, segéd-elemet felvenni, hanem a viszonyítás egy lényegi, fizikailag valóban kitüntetett szereplőhöz történik.

Sajnos ez a megoldás csak látszatsmegoldás. A közeg ugyanis önmagához képest nyugszik (definíció szerint). Így tehát nem lehet leírni, hogy a közegpontok valójában általában távolodgatnak-közeledgetnek egymáshoz, pörögnek egymás körül stb., valamilyen gazdag időfüggő mintát kirajzolva. A közegmozgások leírásához ezért fel szokás venni a  $\chi$  mozgásfüggvényt ill. az  $\mathbf{F}$  mozgásgradienst, mint valamilyen anyagi mezőket az anyagi sokaságon — és az időn — értelmezve. Ezek a függvények azonban akkor milyen halmazban is veszik föl az értékeiket? Mihez is viszonyítanak? Továbbra is valamilyen külső viszonyítási alaphoz. Sehogy se lehet megtrükközni ezt a helyzetet, mindenképpen szükséges marad egy külső mérce, támpont, amihez képest a közeg mozgását kifejezik.

Ezenkívül a közegnek mint egésznek az általában neminerciális, gyorsuló és forgó mozgása még így is elsikkad a fizikai leírásból.<sup>15</sup> Ezek a nemtehetetlenségi mozgások pedig szintén fizikai hatásokkal járnak a közeg számára. Ezt már egyszerű hétköznapi tapasztalatok is mutatják: az ember egyensúlyszerve (és gyomra) megérzi, amikor az autóbusz, amin ül, gyorsít, fékez vagy kanyarodik, amikor a lift hirtelen elindul vele fölfelé vagy lefelé, és amikor a repülő hirtelen süllyedni kezd vele egy alacsonyabb nyomású levegőtartományba érve.

A közeghez mint megfigyelőhöz viszonyításnál tehát ilyen szempontból jobban járunk, ha egy tetszőleges, de inerciális megfigyelőhöz viszonyítunk, mert így kifejezhetjük a neminerciális közegmozgásokat. Tény, hogy viszont ekkor is van egy nem-lényegi tetszőlegesség leírásunkban: az önkényesen választott inerciarendszer. Ráadásul egy rendszer kinematikában matematikai megfogalmazást, kritériumot kellene adni arra, hogy egy megfigyelő, egy vonatkoztatási rendszer inerciális-e.

Rejlik azonban itt egy olyan további probléma is, amelybe az inerciarendszerek használata esetén is beleütközünk: az abszolút tér, „a geometriai tér” problémája. Hétköznapi térélményeink zöme, „földhözragadt” — a Föld bolygó felszínéhez ragadt, ahhoz rögzített — tapasztalataink és látásmódunk ugyanis egy abszolút tér létezésének illúzióját építi fel bennünk. Akadnak azonban olykor olyan élményeink is, melyek megingatják ezt az illúzióinkat. Vegyük példaként a következő, életből ellesett szituációt. András (A) és Bence (B) két különböző vonatban ül, melyek szomszédos vágányokon állnak egymás mellett. Kint sötét este van, külső fények nem látszanak, fülkékben viszont ég a villany. A térélménye a saját fülkéje, B-é az övé. Meglátják egymást az ablakon keresztül (ugyebár ég a

<sup>15</sup> A mozgásgradiens ugyanis érzéketlen egy tetszőleges merevtestszerű mozgásra, így a tetszőleges időfüggésű forgó és gyorsuló mozgásra.

világítás mindkét fülkében). Néhány perc eltelik, aztán egyszer csak mindketten észreveszik, hogy egymáshoz képest mozogni kezdenek. Olyan finoman indulhatott el az egyik — vagy esetleg mindkét? — vonat, hogy semmit nem érzett sem A, sem B. Elbizonytalanodva néz mindkettő a másikra: melyikünk vonata indult el? A tere mozog B-éhez képest, B-é A-éhoz képest. Egyikük tere sem tűnik kitüntetettebbnek a másikéhoz képest.

A tudományos gondolkodásban a geocentrikus világkép helyett terjedni kezdő heliocentrikus felfogás világított rá arra, hogy a Föld pörögve és a Nap körül körbekeringve mozog, és a gravitációs hozzákötődés és súrlódással hozzá képest lefékeződés tünteti csak ki életünkben a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszert.<sup>16</sup>

Az inerciarendszerek fizikai egyenértékűségét pedig először GALILEI fogalmazta meg (remek hajós példabeszédét ld. [GALILEI (1632)], de elolvasható [FÜLÖP (2008a)]-ban is). Ez a GALILEI-féle relativitási elv képletileg azt mondja ki, hogy az inerciarendszerek közötti átjárás nemrelativisztikus jelenségkörben érvényes

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \quad (31)$$

formulájára, az ún. GALILEI-transzformációra (ahol  $\mathbf{V}$  az inerciarendszerek relatív sebessége) minden fizikai képletnek invariánsnak kell lennie.

Namármost, erről a képletről leolvasható, hogy az idő abszolút, mert a transzformációs képlet  $t' = f(t)$  alakú<sup>17</sup>.

Hasonló szemmel ránézve, a második képletről pedig az olvasható le, hogy a tér nem abszolút, ugyanis a transzformációs képlet nem  $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r})$  alakú, hanem  $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}, t)$  alakú.<sup>18</sup>

Az is látható, hogy a térbe belekeveredik az idő is. Ha a térvektorokból szeretnénk konstruálni valami abszolút mennyiséget (olyan mennyiséget, amelyek halmazából már nem visz ki a GALILEI-transzformáció), akkor az időt kell hozzákapcsolni valahogy. Ez megtehető úgy, ha a

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (32)$$

négydimenziós vektort képezzük. Ilyen négyesvektor alakban a GALILEI-transzformáció

$$\begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{V} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (33)$$

<sup>16</sup>A nehézkedést már NEWTON előtt is magyarázták egyesek a Föld vonzásával [SIMONYI (1978), 218. o.].

<sup>17</sup>Sőt, az idő egydimenziós lévén, belátható, hogy ekkor szükségképpen  $t' = t$ .

<sup>18</sup>Az egy adott inerciarendszeren belüli térbeli forgatások  $\mathbf{r}' = g(\mathbf{r})$  alakúak. Nem visznek ki tehát az összes helyvektorok halmazából. Ha csak rajtuk múlna, a tér abszolút lenne.

(blokkmátrix alakba írva), tehát a lehetséges négyesvektorok halmaza már abszolút: nem visz ki belőle a GALILEI-transzformáció.<sup>19</sup>

Abszolút téridő van tehát, és ezen belül létezik abszolút idő is<sup>20</sup>, abszolút tér viszont nincs. Minden vonatkoztatási rendszer saját teret cipel magával, melyből még jobban látszik, hogy mennyi önkényességet jelent és mennyi nemkívánatos, zavaró nyűgöt jelent egy megfigyelőhöz viszonyítani — még egy inerciálishoz is. Mindezekből a gondokból igazából úgy tudnánk kikeveredni, ha rendelkeznék egy olyan téridő- és mozgásleírással, amelyhez nem kell választani semmilyen segéd-elemet, referencia-akármit, vonatkoztatási bármit.

## 5. MÓDSZERTAN A PROBLÉMÁK MEGOLDÁSÁHOZ

A jó hír az, hogy rendelkezünk is ilyen leírással. Néhány évvel a speciális relativitás-elmélet születése után WEYL ismerte föl először, hogy már a nemrelativisztikus fizikában is szükséges a téridő fogalma, és egyből egy olyan megfogalmazást adott rá, amely megfigyelő, vonatkoztatási rendszer nélkül beszél a téridőről és a benne játszódó mozgásokról, folyamatokról. Ezt a tárgyalást azóta többen gazdagították, például JAGLOM vizsgálta a geometer matematikus szemszögéből [JAGLOM (1969)], ARNOLD ismertette a mechanika művelőivel [ARNOLD (1974)], részletes elvi és gyakorlati kidolgozását pedig MATOLCSI adta meg [MATOLCSI (1984)], [MATOLCSI (1993)].

Ez a tárgyalásmód olyan, ahol a matematikai forma végre pontosan a fizikai tartalmat fejezi ki, nem mást, nem többet és nem kevesebbet. A téridőről a fizika története során kialakult összes tapasztalatunk és konzisztens elképzelésünk helyet kap benne, az így-úgy kialakult inkonzisztens beidegződések pedig nem. A leírás összes matematikai szereplője fizikai tartalommal bír, nincsenek pusztán technikai vagy kényelmi szempontból bevezetett segéd-elemek. Ezzel a látásmóddal a téridő pontosan annak látszik, amit a fizika valójában kiderített róla, és a benne élő szereplők sorsa is közvetlenül fogalmazódik meg és közvetlenül vizsgálható. Kritériummal rendelkezünk arról, hogy mely mozgások inerciálisak, és így tovább.

Hogy GALILEINEK és kortársainak térről, időről és relativitásról tett felismerései miatt évszázadokkal később nyertek csak korrekt megfogalmazást, arról vélhetőleg leginkább NEWTON tehet. Az ő tömegvonzási elmélete ugyanis pillanatszerű távolhatást tételez fel, és ehhez nem tudott más matematikai keretet elképzelni, mint egy abszolút tér feltételezését [SIMONYI (1978), 227. o.]. Ez a feltételezés pedig „szíven szúrja” a GALILEI-relativitási elvet. Ezt a problémát ő is látta, és LEIBNIZ is joggal bírálta emiatt, de az utókor

<sup>19</sup> A (32) alak a négyesvektornak egy inerciális koordináta-rendszer szerinti alakja. Vonatkoztatási-rendszer-mentes alakját ld. a következő szakaszban.

<sup>20</sup> Ne feledjük, most csak a nemrelativisztikus jelenségkörben mozgunk.

a newtoni fizika nagy sikerei miatt elfogadta az abszolút tér fogalmát is — jó részük talán az imént említett hétköznapi, Földhöz ragadt beidegződés miatt is —, a GALILEI-féle relativitási elv fontossága pedig csak az elektromágnesség és a speciális relativitáselmélet születése körül került ismét előtérbe.

Kétségtelen, hogy NEWTON a korabeli matematika fejlettségi szintje akadályozta egy abszolút tértől mentes, a GALILEI-relativitási elvet megvalósító elmélet megadásában. A geometria fogalmának fejlődése egy nemtriviális folyamat volt [FÜLÖP (2008a)], mely szintén a speciális relativitáselmélet megszületése után és az euklideszi sík-/térgéometrián túli geometria megfelelő fejlettségi fokán tudott csak eljutni az olyan affin tér fogalmáig, amelyen nincs egy teljesszerű euklideszi szerkezet, csak egy részleges, van viszont rajta egyéb struktúra is. Ilyen ugyanis a nemrelativisztikus téridő szerkezete, és ilyenén lehetséges megfogalmazni a pillanatszerű távolhatást abszolút tér feltételezése nélkül.<sup>21</sup>

Az affin teres téridőleírás tehát olyan keret, amelyben a közegkinematika garantáltan megvalósítja az anyagi objektivitás elvét és az összes egyéb ismert fizikai kívánalmat is. Minden más ismert leírás pedig szenved a fent említett problémáktól, ezért egyetlen kitörési irány adódik: az affin teres téridő-megfogalmazásban adni meg a közegek mozgásának tárgyalását.

A feladat ekkor az, hogy ebben a téridő-formalizmusban értelmezzük az alakváltozási és deformációtenzort, a rugalmasság és a képlékenyedés kinematikai aspektusait, és még mindent, ami a kontinuumok dinamikájához majd szükséges lesz.

Jelen írás ezt az utat fogja választani. Láttuk, hogy a szokásos leíráshoz felvett segéd-  
elemek mennyire elhomályosítják a fizikai lényegét, jószerivel gúzsba kötik az embert, lépten-nyomon belezavarnak a fizikai tisztánlátásba. Ilyen elem a referencia-időpont, a referencia-konfiguráció, a vonatkoztatási rendszer, és ilyen indokolatlan következményük folyadékra és gázra az anyagi sokaság metrikus szerkezete. Ugyanígy nem-lényegi tetszőlegességek lépnek fel mindig olyankor is, ha térpontokat vektorokkal (helyvektorokkal) reprezentálunk, vektorokat számhármassokkal reprezentálunk, de már az is, ha dimenziós mennyiségeket valós számokkal reprezentálunk, mértékegység-választás révén.

Igen, a mértékegység-választás is egy olyan segéd-mozzanat, ami nem lényegi, és emiatt olykor értelmetlen képletekre vezet. Ha ugyanis mértékegységeket választva, valós számokkal reprezentáljuk a távolságértékeket is és az időtartamokat is, akkor mi akadályoz meg bennünket abban, hogy összeadjunk egy távolágot egy időtartammal? Hiszen valós számok összege értelmezve van. Bizony, csak a fizikai józan ész akadályoz meg, mert tudjuk, hogy ezt azért mégsem helyes megtenni. Formalizmusunk azonban megengedi, és ismeretese az irodalomban olyan képletek, sőt, nagyívű elméleti konstrukció is,

<sup>21</sup> Amire szükség van, az ugyanis egy picit kevesebb: az abszolút térszerűség fogalma {ld. a következő szakaszt}.

ahol ilyen meg nem engedett lépéseket követtek el. A fizikai józan ész nem kapcsolt be, annyira másra figyeltek az illetők. Az ilyen szarvashibák elkerülésére szintén az a biztos út, ha olyan a formalizmusunk, hogy egyszerűen nem enged meg ilyen hibákat, azaz számúzve van belőle minden segéd-elem, minden szereplő fizikai lényeggel rendelkezik.

A dimenziós mennyiségek kapcsán is, és általában is, nem helyes, ha mindennek a leírásához valós számokat, illetve valós számhármassokat használunk. Sokszor valamilyen hasonló, de kicsit más mennyiség-típusok lennének fizikailag adekvátabbak, például egy vektor, egy affin tér egy pontja, vagy egy sokaság egy pontja lenne a fizikai lényeghez illeszkedő matematikai modell. A valós számok (számhármassok, stb.) olyan tulajdonságokkal is rendelkeznek, amikkel a modellezni kívánt fizikai szereplő nem, és ilyen esetekben a többlet tulajdonságok útkadályként nehezítik a boldogulást.

Ugyanígy például ha azt állapítjuk meg, hogy a bal és a jobb deformációtenzorok fizikailag más jelentésűek — mert egyik fajta az anyaghoz rögzített távolság- és irányviszonyokhoz viszonyít, a másik az inerciális/téridő-viszonyokhoz, és emiatt fizikailag blőd lenne egy bal és egy jobb mennyiség átlagát venni [v.ö. (13)], akkor a bal és a jobb tenzorok legyenek különböző típusú matematikai mennyiségek, amelyekre nincs értelmezve az összeadás, és akkor garantáltan nem lehet az átlagukat venni, a formalizmus automatikusan meg fogja gátolni a fizikailag hibás konstrukciót.

Leírásunkhoz tehát olyan matematikai objektumokat keressünk, amik pont annyit fejeznek ki, ami fizikai tulajdonságokat velük épp ki szeretnénk fejezni: nem többlet, nem kevesebbet, nem mást. Pontosabban — és itt egy fontos módszertani megállapítás következik: meg kell különböztetni elvi szerepű-tartalmú és technikai-alkalmazássegítő fogalmakat. Előbbieket a modellünk, a fizikai lényeg megfogalmazásához használjuk, utóbbiakat pedig egy-egy konkrét alkalmazásban, speciális elrendezésben a számolás, a kezelés minél praktikusabb leírásához.

Például a tömegpont-mechanika bolygómozgásos alkalmazásában hasznos speciális fogalom a pályaezcentricitás, általános tömegpont-mechanikai szerepe, jelentése azonban nincs. A kontinuumfizikában a referenciakonfiguráció hasznos technikai segédfogalom számos konkrét feladat analitikus<sup>22</sup> illetve numerikus (pl. végeselemes) megoldásához, elvi szerepe ellenben nincs. A henger-koordinátarendszer igen célszerű hengersizmetrikus elrendezésekhez, gömbszimmetrikus szituációkban viszont alkalmasabb a gömbi koordinátarendszer, általános elvi tárgyaláshoz pedig a koordinátarendszer-mentes leírás a legjobb.<sup>23</sup>

<sup>22</sup>Id. pl. [FÜLÖP–BÉDA (2009)], [ASSZONYI–SZARKA–BÉDA (2009)]

<sup>23</sup>Az a felosztás is csak nagyjából igaz, hogy az alkalmazás-oldalon valós számokat, számhármassokat stb. használunk, elvi célokra pedig vektorokat, affin tér elemeit, sokaság pontjait stb. A fizikai mérések például nem mindig számokat adnak eredményül: az iránytű például egy irányt magát mér. Bizonyos számítógépes programok pedig képesek kezelni a dimenziós mennyiségeket is, nem kell mértékegység-választás révén számmal reprezentálni őket.

Az alkalmazások természetesen fontosak, azonban nem az egyedül fontosak: az elmélet megalkotásában nem jó, ha kizárólag az vezérel bennünket, hogy hogyan fogjuk majd tudni alkalmazni. Például ha EINSTEINT az vezette volna az általános relativitáselmélet megalkotása során, hogy hogyan lehet majd elméletét alkalmazni, konkrét szituációkban megoldani, akkor az általános relativitáselmélet — mely alkalmazásokban egy, tíz ismeretlen négyváltozós függvényre vonatkozó, csatolt nemlineáris másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldását kívánja meg — bizonyára sohasem született volna meg. Szerencsére EINSTEINT néhány egyszerű fizikai elvárás és észrevétel vezérelte, a megszületett EINSTEIN-egyenlet pedig az alkalmazhatóság terén is kiemelkedően sikeres lett: a fizika máig ismert legnagyobb kísérleti pontossággal igazolt egyenletének bizonyult.<sup>24</sup>

Ezen a ponton arra is érdemes kitérni, hogy egy tudományos elméletnek két fontos szerepe van: a magyarázó erő és a jóserő. Az első az, hogy szeretnénk megérteni az adott szituációt minél jobban. (Ez egyrészt valószínűleg egy általános intellektuális igénye az emberiségnek. Emellett konkrét konstruktív haszna is van: ezáltal tudunk egy elméletet a többihez viszonyítani, kapcsolni, és új elméleteket kidolgozni.) A második pedig az, hogy az elméletet alkalmazni tudjuk tudományos jóslatok kimondására. Mindkét feladatban szempontjából szerepet játszik az elmélet elvi-lényegi alakja is és az alkalmazásai is, de az alkalmazások elsősorban a jóserő kapcsán játszanak nagy szerepet, a magyarázó erőhöz kisebb súllyal járulnak hozzá, mint az elvi-lényegi rész.

Namármost, az elvi oldalon olyan matematikai megfogalmazást alkossunk, aminek lehetőleg minden tulajdonsága megfelel fizikai jelentésnek (mármint közelítőleg, hiszen azt azért ne várjuk, hogy tökéletesen pontos lesz egy modell a valóságra, illetve annak egy szeletére). Ugyanígy a már meglévő elvi munkák is feldolgozandók az irodalomban: ha valaminek nincs elvi szerepe, és ha nélküle is boldogulunk<sup>25</sup>, akkor mellőzzük.

Minden elméletről szóló írásnak: cikknek, könyvnek, tankönyvnek helyes lenne feltüntetnie ezt a megkülönböztetést elvi és alkalmazássegítő fogalmak között. Sajnos még az olyan igényességre törekvő művek, mint [TRUESDELL–NOLL (1965)] és [HAUPT (2002)] is keverik a kétfajta fogalmakat, amelynek meg is issza a levét közegkinematikájuk (és bizonyára közegdinamikájuk is). Pedig segítene is az adott terület megértésében és előrehaladásában, ha ezt a megkülönböztetést mindig megadnák, mert így rögtön látnák, hogy hol vannak olyan pontok, ahol egy technikai segéd-elem szerepel, amelyet az elvi

<sup>24</sup> A kettőscsillagok egymás körüli keringési idejének megjósolt — gravitációs hullámokkal kisugárzott energiavesztés miatti — apró,  $10^{-12}$  nagyságrendű relatív csökkenése  $10^{-2}$  relatív hibával nyert kísérleti megerősítést [FIZIKAI NOBEL-DÍJ SAJTÓKÖZLEMÉNY (1993)]. A keringési idő értelmezésének eme  $10^{-14}$  relatív hibájú pontossága máig lekörözi a részecskefizikában elért eddigi legnagyobb pontosságokat is.

<sup>25</sup> hiszen azért nem mindig olyan kiforrott fizikailag vagy matematikailag kezelhető a helyzet, hogy boldoguljunk bármi technikai segéd-elem nélkül

tárgyalásból el kellene távolítani: megoldandó elvi tennivalókra mutatna rá, orientálná a kutatást.

Jelen írás például a továbbiakban csak az elvi oldallal fog foglalkozni. De csak területi okokból: folytatásaként egy következő írásműben be kell majd mutatni az itt felállított tárgyalás speciális esetekben egyszerűbb, alkalmazássegítő alakokra átfordítását is.

Ami pedig a fogalmak megadását illeti, az érdemi előrehaladáshoz ajánlatos eltávolítani belőlük minden hallgatólagos feltételezést, magától értetődőnek tartott és ezért ki nem mondott mozzanatot, de a kifejejtett elemeket is fel kell tárni. Ennek az ismert legkonstruktívabb módszertana, melyet többek között MATOLCSI képvisel teljes következetességgel<sup>26</sup>, az, hogy az elvi alapvetésben (is) minden fogalom teljesen matematikai legyen, definíciója csupa olyan objektumra hivatkozzon, amely már matematikai definíciót kapott. Így például „A távolságértékek halmazának egy  $\mathbb{L}$  egydimenziós valós irányított vektorteret nevezünk.”, vagy „Nemrelativisztikus téridőnek egy  $(M, \mathbb{T}, \tau, \mathbb{L}, \mathbf{h})$  fogalomötöst nevezünk, ahol  $M$  egy négydimenziós valós irányított affin tér,  $\mathbb{T}$  az időtartamok egydimenziós valós irányított vektortere, stb.”. A gyakorlatban ez többnyire úgy szokott kinézni, hogy minden fogalom vagy egy halmaz, vagy egy halmazból egy halmazba képező függvény.<sup>27</sup>

Ezért tulajdonképpen könnyű megállapítani, hogy egy — akár rengeteg matematikát használó — írásmű eleget tesz-e ennek a tudomány módszertani kritériumnak. Ha minden fogalma (mármint annak matematikai modellje) egy matematikai definíció, melyben semmi definiálatlan fogalom nincs, az eleget tesz neki. Azonban valóban semmi definiálatlan fogalom ne szerepeljen a definícióban. A már többször említett [TRUESDELL–NOLL (1965)] és [HAUPT (2002)] művekben például definiálatlanok maradnak többek között olyan fogalmak, mint idő, tér, fizikai megfigyelő (így a megkülönböztetés is inerciális és neminerciális megfigyelő között).

Nem valamiféle „rendmániáról”, formális és öncélú igényeskedsérről van itt szó. A hétköznapi mondás is azt tartja [BLOCH (1985)]: ha már minden próbálkozás csődöt mondott, olvasd el a használati utasítást! Vagy ahogy POPPER meséli [POPPER (1995)], amikor egy hosszú külföldi tanulmányúton szerzett tapasztalatairól próbált könyvet írni: „Neki is fogtam a könyv megírásának, de rövidesen elakadtam. Hamisnak éreztem azt, ami a papírra került. Bánatomat elkeseregtem egy muzsikus barátomnak, aki elgondolkozott, majd azt mondta: – Tudod, én is jártam már úgy, hogy készültem egy darabra, és nem szólalt meg bennem. Én ilyenkor nekiállok »technikázni«: tökéletesen kigyakorolom a

<sup>26</sup>Id. pl. [MATOLCSI (1984)], [MATOLCSI (1986)], [MATOLCSI (1993)]

<sup>27</sup>A fizikai érzék természetesen szintén fontos szerepet játszik: ott, hogy milyen tulajdonságú matematikai objektumot választunk az adott fizikai objektum modellezésére. Az alábbiak ezt részletesebben is hangsúlyozni fogják.

darabot. És nemegyszer azt tapasztaltam, hogy munka közben életre kelt, amit csináltam, és bennem is megtörtént az, ami a hangszeren.” Ugyanígy, ha egy tudományterület már régóta meg van akadva egy fogalommal vagy problémával, előbb-utóbb nem marad más út: neki kell látni és kitechnikázni az adott dolgot: pontos matematikai megfogalmazást próbálni adni neki.

Nem csak akkor érdemes azonban rendet rakni, amikor már sehogy se boldogulunk a rendrakás nélkül, hanem jó, ha általában is állandó, folyamatos munkastílusunkká válik, hogy mindig mindent rendes matematikával fogalmazunk meg. A tapasztalat ugyanis azt mutatja, hogy amikor a fizikában valamit nem sikerül matematikailag pontosan megfogalmazni, akkor azt fizikailag sem értjük. Ezért egy produktív állandó önellenőrzési módszer az, ha mindig minden fogalmat pontos matematikával sikerül megadni.

Ez a tapasztalat, mely egy érdekes megfigyelés, tulajdonképpen viszonylag érthető is. A matematika ugyanis nem más, mint az emberiség eddig ismert legalaposabb, legszisztematikusabb gondolkodási formája. Ha valamit nem sikerül ebbe a keretbe beilleszteni, arról valószínűleg még nem vagyunk képesek elég konzisztensen gondolkodni.

Egy fizikai elmélet pontos matematikai megfogalmazása emellett azért is praktikus, mert onnantól kezdve tudjuk, hogy konkrét feladatok megoldására milyen (egzakt és közelítő) módszereket használhatunk, a matematika eszköztárában mikhez nyúlhatunk. Egy matematikai tételre úgyis csak akkor támaszkodhatunk, ha a tételhez felsorolt feltételek biztosítva vannak. Természetesen felmerülhetnek olyan nehéz matematikai problémák, amikre még nem ismeretes megoldás, amikor az általunk bevezetett, céljainkra alkalmaznak talált matematikai fogalmak tulajdonságairól még nem rendelkezünk elegendő tudással. Ilyenkor jogunk van sejtéseket megfogalmazni, és azokkal haladni tovább. Ilyen esetekben azonban végeredményeinknél fel kell tüntetni, hogy azok is csak sejtések, és hogy mely feltételezéseink teljesülése igazolná őket.

A teljes — esetleg csillogó — matematikai megfogalmazás azonban önmagában kevés. Az is szükséges, hogy az általa megfogalmazott fizikai tartalom fizikailag helytálló legyen (legalábbis modellünk érvényességi körén belül, egy elfogadható pontosságú közelítés erejéig). Rossz fizikai tartalomnak pedáns matematikai megfogalmazása nem javít. Léteznek olyan szerzők és olyan írásművek, akik ill. amelyek a ló túlsó oldalára esnek-csúsznak át: formalizmusuk precíz, ám a fizikai tartalom kérdéses, vagy explicite hibás. A matematikai modellezésnek két oldala van: a valóság és a matematika. Tiszteljük a valóságot, annak minél hűbb figyelembe vételére törekedjünk. Másrészt, a valósághoz rendelt — annak egy részéhez rendelt, egy adott pontosságig elfogadható — modellünk teljesen matematikai módon legyen megfogalmazva. A ló hátán, középen ülünk, nem pedig az egyik, és nem a másik oldalára lecsúszva.

Egy mérnök, egy tudós annak a felelősségének is tudatában kell legyen, hogy mun-



káján emberi életek és rengeteg emberi erőfeszítés értelme múlik. Csak egyetlen példát említve: 2009 júliusában szinte teljesen leállt a 300 kilométeres német S-Bahn gyorsvasúthálózat [INDEX.HU (2009-10)]. Az egyik szerelvény kerekén ugyanis törést észleltek, majd ezt követően elrendelték az összes vonat valamennyi kerekének ellenőrzését. A vizsgálat során bebizonyosodott, hogy a kocsik kétharmadát ki kell vonni a forgalomból és a kerekeket biztonsági okokból sürgősen ki kell cserélni. Várhatóan legalább másfél évig nem áll helyre a menetrend, az okozott közlekedési káosz legalább egymillió embert érint naponta, és csupán az utasok kártalanítása több, mint százmillió euróba kerül. A kerekek törékenységének valószínű oka pedig az, hogy készítési eljárásuk egy újfajta — és a jelek szerint hibás — képlékenységi elméleten alapult [MEZEI (2008)]. Ezt a felelősséget észben tartva kell arra törekednünk, hogy az elméletek az adott szituáció összes releváns fizikai aspektusát lefedjék, és teljesen következetes, szisztematikus gondolati konstrukciók legyenek.

## 6. A SZÜKSÉGES ESZKÖZÖK, ÉS AMIKHEZ SZÜKSÉGESEK

Tekintsük most át azokat a matematikai eszközöket, amelyekre szükségünk lesz a közegkinematikához az imént megfogalmazott módszertannak megfelelően, és egyből lássuk is fizikai alkalmazásukat: hogy melyik milyen célra is kell majd. Az itt célirányosan összefoglaltakon túli részleteket például a 26. lábjegyzetben hivatkozott művekben találhatjuk meg.

### 6.1. VEKTORTEREK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Első hasznos eszközünk a vektortér lesz (nevezik lineáris térnek is). Egy valós vektortér olyan halmaz, melynek elemeire értelmezve van az összeadás és a valós számmal való szorzás, és ezek a műveletek eleget tesznek bizonyos kellemes műveleti tulajdonságoknak<sup>28</sup>. Egy véges  $m$  dimenziós vektortéren kiválasztható<sup>29</sup>  $m$  darab lineárisan független nemnulla vektor, ezek bázist alkotnak, azaz a vektortér bármely eleme előáll ezek egy bizonyos lineárkombinációjaként. A bázisok sodrásirány szerint kétféleképpen lehetnek, ha egyiket kiválasztottuk pozitív sodrásiránynak, akkor irányítottá tettük a vektorteret. Egy egydimenziós vektortéren — mely szemléletesen egy „origóval ellátott egyenes”, és melyen egy bázis egyetlen nemnulla vektort jelent —, az irányítás megadása arra egyszerűsödik, hogy a vektortér egyik felét nevezzük ki pozitívnak, tehát az egyik „félegyenes” elemeit nevezzük ki a pozitívnak,  $-1$ -szereseik lesznek a negatív elemek.

Egy  $m$  dimenziós  $U$  és egy  $n$  dimenziós  $V$  vektortér diadikus vagy tenzorszorzata,  $U \otimes V$  egy  $mn$  dimenziós vektortér. Rajta az  $u_i \otimes v_j$  vektorok

<sup>28</sup>Id. asszociativitás, disztributivitás, kommutativitás

<sup>29</sup> messze nem egyértelmű módon: folytonosan végtelen sok lehetőség van

( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) egy bázist adnak meg, ha  $\mathbf{u}_i$ -k egy bázis  $U$ -n és  $\mathbf{v}_j$ -k egy bázis  $V$ -n. Egy  $m$  dimenziós  $U$  és egy egydimenziós  $W$  vektortér diadikus vagy tenzoriális hányadosa,  $U//W$  egy  $m$  dimenziós vektortér. Rajta az  $\mathbf{u}_i//\mathbf{w}$  vektorok ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) egy bázist adnak meg, ha  $\mathbf{u}_i$ -k egy bázis  $U$ -n és  $\mathbf{w}$  egy bázis  $W$ -n. Ez a tenzoriális osztás a vektorok valós számokkal osztásának értelemszerű kiterjesztése.<sup>30</sup> Az egydimenziós vektorterekkel vett tenzorszorzás kommutatív:  $U \otimes W = W \otimes U$ ,  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{w} \otimes \mathbf{u}$ . Mivel az irányított egydimenziós vektorterek ugyanúgy viselkednek a tenzorszorzásra és -osztásra vonatkozóan, mint a valós számok  $\mathbb{R}$  halmaza, a továbbiakban a valós számok halmazához hasonlóan üreges betűs jelölést kapnak, pl.  $\mathbb{W}$ , és röviden mértékegyeneseknek is fogjuk hívni őket<sup>31</sup>.

Értelemszerű módon definiálható mértékegyenesek tenzoriális hatványa, pl.  $\mathbb{W}^{(2)} := \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$ , ám nemcsak pozitív egész, hanem tetszőleges valós kitevőre is, így a tenzoriális gyökvonások is értelmesek. Az egydimenziós  $\mathbb{W}$   $p$ -edik tenzoriális hatványa,  $\mathbb{W}^{(p)}$  egydimenziós, és elemei rendelkeznek az elvárt  $(\lambda \mathbf{w})^{(p)} = \lambda^p \mathbf{w}^{(p)}$  tulajdonsággal, minden  $\lambda$  pozitív valós számra. Kiderül, hogy  $\mathbb{W}^{(-1)} = \mathbb{R}/\mathbb{W} = \mathbb{W}^*$  (itt  $*$  a duális vektorteret jelöli, definícióját ld. hamarosan).

Ha  $A$  egy  $U$ -ből  $V$ -be ható lineáris leképezés, jelöléssel  $A : U \rightarrow V$ , akkor természetes, kitüntetett, egyértelmű módon tartozik hozzá egy  $U \otimes \mathbb{W} \rightarrow V \otimes \mathbb{W}$  lineáris leképezés (ugyanis ha  $A$  egy  $\mathbf{u}$ -t  $\mathbf{v}$ -be visz, jelöléssel  $A : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ , akkor ehhez az  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  leképezés tartozik), mely leképezést jelölhetünk szintén  $A$ -val. Így természetesen minden  $p$ -vel is mondható, hogy  $A : U \otimes \mathbb{W}^{(p)} \rightarrow V \otimes \mathbb{W}^{(p)}$ .

A véges  $m$  dimenziós  $U$  vektortér kovektorainak a  $\mathbf{k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  lineáris leképezéseket nevezzük.  $U$  összes lehetséges kovektorának halmaza egy szintén  $m$  dimenziós vektorteret alkot, jele  $U^*$ , neve  $U$  duálisa. Egy  $U$ -beli  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) vektorok alkotta bázis duális bázisa az az egyértelmű módon létező,  $\mathbf{k}^j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) vektorok alkotta bázis  $U^*$ -ban, melyre  $\mathbf{k}^j(\mathbf{u}_i) = \delta_i^j$ , ahol  $\delta_i^j$  a KRONECKER-delta. A lineáris leképezések hatása a továbbiakban zárójel nélkül lesz jelölve („szorzat jelölés”), tehát pl.  $\mathbf{k}^j \mathbf{u}_i = \delta_i^j$ .

$U$  duálisának duálisa természetes módon azonosítható az eredeti  $U$ -val, tehát mondhatjuk, hogy  $(U^*)^* = U$ , mert minden  $\mathbf{u} \in U$  egyben  $U^*$  egy kovektora is,  $\mathbf{u}\mathbf{k} := \mathbf{k}\mathbf{u}$  módon hatva minden  $\mathbf{k} \in U^*$ -ra, és  $U^*$  minden kovektora egy  $\mathbf{u} \in U$ . Egy  $A : U \rightarrow V$  lineáris leképezéshez egyértelmű, kitüntetett módon tartozik egyrészt egy bilineáris  $V^* \times U \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés<sup>32</sup>, másrészt  $V \otimes U^*$  egy eleme. Mindkettejüket szintén egyszerűen  $A$ -nak jelölhetjük. Ezek a megfeleltetések, azonosítások könnyen szemléltethetőek azzal, hogy egy mátrixra is három módon nézhetünk rá. Egyrészt egy kétváltozós függvényként

<sup>30</sup> Megjegyzés: a tenzoriális hányadosnak nincs köze ahhoz, amikor egy vektorteret egy alterével faktorizálunk, noha a két művelet jelölése hasonló.

<sup>31</sup> Az elnevezés eredete az a fizikai alkalmazásuk, mely hamarosan bemutatásra kerül.

<sup>32</sup>  $\times$  itt a halmazok DESCARTES-szorzatának a jele.

— balról egy sor-, jobbról egy oszlopmátrixszal szorozva. Másrészt egy vektorból vektort készítő függvényként — jobbról egy oszlopmátrixszal szorozva egy oszlopmátrixot kapunk. Harmadrészt egy diadikus/tenzori szorzatként — egy oszlopmátrix és egy sormátrix diadikus szorzataként (vagy több ilyen összegeként).

Az  $A : U \rightarrow V$  lineáris leképezés duális transzponáltja az az  $A^* : V^* \rightarrow U^*$  lineáris leképezés, mely  $\ell \mapsto \ell \circ A$ . A kompozíció (összetett függvény)  $\circ$  jele lineáris leképezések kompozíciója esetén a továbbiakban el lesz hagyva (szintén „szorzat jelölés”). Tehát  $A^* : \ell \mapsto \ell A$ , azaz  $A^* \ell : u \mapsto \ell A u \in \mathbb{R}$ . Leképezések szorzatának (vagyis igazából kompozíciójának) a duálisa a duálisok fordított sorrendű szorzata (kompozíciója):  $(AB)^* = B^* A^*$ .

Ha egy  $C$  lineáris leképezés  $U$ -ból  $U^*$ -ba hat, akkor  $C^* : U \rightarrow U^*$ , és ilyenkor értelmezhető  $C$  szimmetrikus része,  $C^S := \frac{1}{2}(C + C^*)$ , és antiszimmetrikus része,  $C^A := \frac{1}{2}(C - C^*)$ . Egy ilyen  $C$  szimmetrikus, ha antiszimmetrikus része nulla, és antiszimmetrikus, ha szimmetrikus része nulla.  $U$ -ból  $U$ -ba ható lineáris leképezésnek *nem értelmezhető* a szimmetrikus és antiszimmetrikus része, szimmetrikussága, antiszimmetrikussága. A  $\text{tr}$  leképezés ellenben  $U \otimes U^*$  és  $U^* \otimes U$ , azaz  $U \rightarrow U$  és  $U^* \rightarrow U^*$  típusú tenzorokra értelmes, és speciálisan  $\text{tr}(u \otimes k) = \text{tr}(k \otimes u) = ku = uk$ .

Egy  $G : E \rightarrow E^*$  szimmetrikus lineáris leképezés skalárszorzat (más néven: metrika)  $E$ -n, ha minden nemnulla  $e \in E$ -re  $(Ge)e > 0$ . Ilyenkor  $E$ -t euklideszi térnek nevezük,  $G$ -re vonatkozóan. Egy skalárszorzat invertálható, és inverze,  $G^{-1} : E^* \rightarrow E$  egy skalárszorzat  $E^*$ -n. A fentebbiek értelmében  $G$  felfogható egy bilineáris  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  leképezésként és  $E^* \otimes E^*$  egy elemeként is,  $G^{-1}$  pedig egy bilineáris  $E^* \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$  leképezésként és  $E \otimes E$  egy elemeként is.

A  $G : E \rightarrow E^*$  skalárszorzat egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít  $E$  és  $E^*$  elemei között. Ezért nem szokás egy euklideszi tér kovektorairól beszélni: mert a skalárszorzat révén azonosítani szokták a vektoraival. Mi most ne kövessük ezt a gyakorlatot, mert a következő szakaszokban olyan vektorterekkel lesz dolgunk, melyeken egyetlen skalárszorzat helyett két különböző skalárszorzat is fel fog bukkanni, melyek különböző módon fognak megfeleltetést jelenteni  $E$  és  $E^*$  elemei között — és akkor inkább már egyiket se válasszuk.

Egy  $e \in E$  vektornak a  $G : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  skalárszorzat szerinti hossza az  $\|e\|_G := \sqrt{G(e, e)} \in \mathbb{R}_0^+$  (itt  $\mathbb{R}_0^+$  a nemnegatív valós számokat jelöli). A  $G : E \rightarrow E^*$  alakkal megadva ugyanez az  $\|e\|_G := \sqrt{(Ge)e} \in \mathbb{R}_0^+$  módon írható. Az  $e$  és  $f$  által bezárt szög:

$$\varphi := \arccos \frac{G(e, f)}{\|e\|_G \|f\|_G}, \quad (34)$$

és speciálisan  $e$  és  $f$  merőlegesek, ha  $G(e, f) = 0$ . Szemléletformáló az az észrevétel,

hogy ha egy vektortéren nincs skalárszorzat megadva, akkor nem beszélhetünk vektorok merőlegességéről. Két vektor lehet lineárisan független egymástól, de a lineárisan független helyzetek között nincs egy kitüntetett, merőleges helyzet. Két vektor bezárt szöge sem értelmezhető skalárszorzat nélkül. Ugyanígy nincs vektoroknak hossza sem, mindössze olyan vektorok „hosszarányáról” tudunk beszélni, melyek egymás számszorosai.

Mint az elhangzott, egy  $A : E \rightarrow E$  lineáris leképezésnek nem létezik szimmetrikus és antiszimmetrikus része. Egy  $G : E \rightarrow E^*$  skalárszorzat segítségével azonban értelmezhető az  $A^+ := G^{-1}A^*G : E \rightarrow E$  metrikus adjungáltja, és az ezzel definiált metrikusan szimmetrikus és antiszimmetrikus rész. Láthatjuk tehát, hogy amikor egy euklideszi téren egyszerűen „transzponáltról” beszélnek, amögött két dolog is lehet: a duális transzponált (mely nem támaszkodik a vektortér skalárszorzat szerkezetére), és a metrikus adjungált (amely támaszkodik). Ha az  $E$  és  $E^*$  közötti azonosítást feloldjuk, az addig egyféle  $E \rightarrow E$  lineáris leképezések (tenzorok) négy különböző fajtájú mennyiségnek bizonyulhatnak:  $E \rightarrow E$ ,  $E \rightarrow E^*$ ,  $E^* \rightarrow E$  vagy  $E^* \rightarrow E^*$  típusú mennyiségnek. Ezek közül az elsőnek és a negyediknek nem beszélhetünk szimmetrikusságáról, antiszimmetrikusságáról, csak metrikus szimmetrikusságáról, metrikus antiszimmetrikusságáról. Amivel nincs is baj, ha van egy kitüntetett skalárszorzatunk erre a célra. Ha viszont két különböző skalárszorzatunk is mutatkozik, akkor már el kell gondolkoznunk, hogy mit is akarunk csinálni. Sajátérték-problémája ellenben csak  $E \rightarrow E$  és  $E^* \rightarrow E^*$  leképezéseknek van — mert a sajátvektor valahányszorosát kell visszakapnom, tehát ugyanabba a vektortérbe kell visszaérkezzek.

Az  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  bilineáris, szimmetrikus, pozitív definit leképezések általánosításaként az  $E \times E \rightarrow \mathbb{W}^{(2)}$  bilineáris, szimmetrikus, pozitív definit leképezések is skalárszorzatok, ahol  $\mathbb{W}$  egy mértékegyes. A fentiek értelmében ezek egyben  $(E/\mathbb{W}) \times (E/\mathbb{W}) \rightarrow \mathbb{R}$  leképezések is, és így  $E/\mathbb{W} \rightarrow (E/\mathbb{W})^*$  leképezések is és  $(E/\mathbb{W})^* \otimes (E/\mathbb{W})^*$ -beli elemek is. Egy  $e \in E$  vektornak a  $H : E \times E \rightarrow \mathbb{W}^{(2)}$  skalárszorzat szerinti hossza az  $\|e\|_H := \sqrt{H(e, e)} \in \mathbb{W}_0^+$ , azaz nemnegatív  $\mathbb{W}$  értékű mennyiség. A  $H : E/\mathbb{W} \rightarrow (E/\mathbb{W})^*$  alakkal megadva ugyanez az  $\|e\|_H := \sqrt{(He)e} \in \mathbb{W}_0^+$  módon írható.

Az eddig elhangzottak első alkalmazásaként a dimenziós fizikai mennyiségek matematikai modelljét adhatjuk meg. Vegyük példaként a távolságértékek halmazát. Ha az erdőben vagy parkban sétálva találunk egy botot, ennek a botnak a hossza önmagában egy fizikai realitás. Van értelme két bot hosszának az összegének: egymás mögé, egymás meghosszabbításaiként egy egyenesbe teszük őket. Van értelme egy bothossz egész számú többszörösének és törtrészének, és ésszerű absztrakcióval — és jóformán tetszés szerinti pontosságú gyakorlati eljárással — származtatva egy hossz tetszőleges valós számszorosának. Választhatunk egy hosszat egységként, ekkor bármely hossz megadható azzal a valós számmal, ahányszorosa egységünknek. Egységnek választhatjuk például egy ural-

kode alkarhosszát, bolygónk Egyenlítőjének valahányadrészét, vagy egy előírt számú szilíciumatom alkotta egykristály gömb sugarát, de ezek egyike se univerzálisan kitéveztett másikkhoz képest.

A fentiek fényében ésszerű a távolságértékek halmazát egy  $\mathbb{L}$  egydimenziós való irányított vektortérrel, rövidebb nevén mértékegyenessel modellezni. (A mértékegyenes elnevezés eredete tehát az, hogy egy ilyen halmaz célszerűen használható fizikai mennyiségek, mérési értékek matematikai modelljeként.) A mértékegység-választást egy bázisvektor választása modellezi, a mértékegységváltást egy bázisváltás. Az időtartamokat modellezzé egy másik,  $\mathbb{T}$  mértékegyenes. Ekkor nincs értelmezve — fizikailag helyesen — egy  $\ell \in \mathbb{L}$  és egy  $t \in \mathbb{T}$  érték összege, értelmezve van viszont — fizikailag szintén helyesen — szorzatuk,  $\ell \otimes t$  és hányadosuk,  $\ell // t$ . Ez a szorzat és hányados teljesíti a fizikai érzék szerint elvárt műveleti szabályokat, pl.  $(\ell_1 + \ell_2) // t = \ell_1 // t + \ell_2 // t$ ,  $(\alpha \ell) // (\beta t) = (\alpha / \beta) (\ell // t)$ .

A mértékegyenes változójú, és a mértékegyenes értékű függvények analízise (folytonosság, deriválás, integrálás, műveleti szabályaik) ugyanúgy zajlik, mint az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeké. Automatikusan teljesül minden olyan elvárásunk, hogy például egy  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{L}$  függvény —pl. egy távolság az eltelt idő függvényében — deriváltja  $\mathbb{L} // \mathbb{T}$  értékű, tehát sebesség dimenziójú.

## 6.2. AFFIN TEREK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Ahogy egy vektortér szemléletesen egy origóval ellátott egyenes (origóval ellátott sík, origóval ellátott tér, stb.), úgy az affin tér az origóválasztás nélküli, „szűz” egyenes (sík, tér, stb.) fogalma.<sup>33</sup> Maga a szintiszta egyenletesség.

Minden affin tér egy vektortér segítségével definiálódik, egy vektortér tartozik hozzá. Ezt a vektorteret az affin tér alulfekvő vektortérének is nevezik. Szemléletesen szólva, egy affin tér bármely két eleme (pontja) közé behúzható egy vektor, az alulfekvő vektortér egy egyértelműen meghatározott eleme. Ugyanezt egy kicsit máshogy nézve, ha az affin térnek bármelyik pontját megragadjuk, onnan mint origóból nézve egy vektortérnek néz ki — mégpedig ugyanannak a vektortérnek, az alulfekvő vektortérének fog kinézni. Ez után a barátkozó bevezető után lásuk a pontos definíciót is: affin térnek nevezünk egy  $(U, \mathbf{U}, \mathbf{d})$  fogalomhármast, ahol  $U$  egy nemüres halmaz,  $\mathbf{U}$  egy vektortér,  $\mathbf{d}$  pedig egy

<sup>33</sup> Annyira vigyázzunk csak ezeknél az egyébként kiváló szemléltetéseknel, hogy az origóval ellátott papírlapunk síkján, az origóból húzott irányított szakaszainknak fizikailag van merőlegességük, bezárt szögük és hosszuk, míg a vektorterek közül ezek csak az euklideszi vektorterekre léteznek. Az egyéb vektorterek szemléltetéséhez el kell feledkeznünk papírlapunk euklideszi tulajdonságairól. Ugyanígy affin térből is van euklideszi is és euklideszi szerkezet nélküli is, mint azt mindjárt látni fogjuk.

$U \times U \rightarrow U$  leképezés, melyre

$$\mathbf{d}(p, q) + \mathbf{d}(q, r) = \mathbf{d}(p, r) \quad (35)$$

minden  $p, q, r \in U$ -ra, továbbá minden  $p \in U$ -ra a  $q \mapsto \mathbf{d}(p, q)$  leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés  $U$  és  $U$  között.

$U$  tehát az alulfekvő vektortér, és  $\mathbf{d}$  húzza be a vektort (különbségvektort) az affin tér két pontja közé. A rövideg kedvéért  $U$ -t magát szokás az affin térnek hívni, de persze mindig ott kell legyen hozzá az  $U$  alulfekvő vektortér és a  $\mathbf{d}$  „vektorbehúzó leképezés” is.

Az  $U$  affin tér dimenziója definíció szerint  $U$  dimenziója. Ha  $U$  irányított, akkor  $U$ -t is irányítottan nevezük. Hasonlóan,  $U$  euklideszi affin tér, ha  $U$  euklideszi vektortér. Ha nem, nem.<sup>34</sup> Minden  $U$  vektortér egyben egy affin tér is önmaga mint alulfekvő vektortér fölött, a  $\mathbf{d}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \mathbf{q} - \mathbf{p}$  vektorkivonással mint vektorbehúzó leképezéssel. Úgymond úgy lesz egy vektortér affin tér, hogy eldobjuk belőle az origó kitüntetett voltát. (Persze az igazán izgalmas affin terek azok, melyek nem vektorterek.)

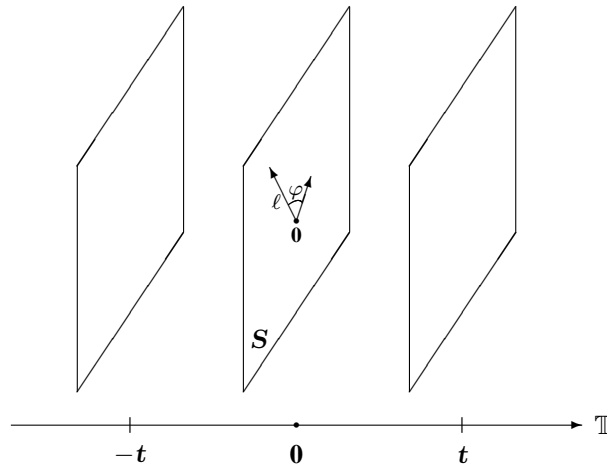
Az affin tér fogalma azért szükséges jelen céljainkhoz, mert segítségével adható meg a nemrelativisztikus téridőmodell. A nemrelativisztikus téridő tulajdonságairól [FÜLÖP (2008a)] adott egy ismertetőt, ott egy inerciális koordinátarendszer szerinti koordinátákkal szemlélve. Most a vonatkoztatásirendszer-mentes tárgyalás következik. Nemrelativisztikus téridőmodellnek nevezünk egy  $(M, \mathbb{T}, \tau, \mathbb{L}, \mathbf{h})$  fogalomötöst, ahol  $M$  egy négydimenziós valós irányított affin tér egy  $M$  vektortér fölött,  $\mathbb{T}$  az időtartamok mértékegyenese,  $\tau$  egy  $M \rightarrow \mathbb{T}$  nemelfajuló lineáris leképezés,  $S$  jelöli  $M$ -nek azt a háromdimenziós alterét, melyen  $\tau$  a nulla értéket veszi föl,  $\mathbb{L}$  a távolságértékek mértékegyenese,  $\mathbf{h}$  pedig egy  $S \times S \rightarrow \mathbb{L}^{(2)}$ , azaz  $S/\mathbb{L} \rightarrow (S/\mathbb{L})^*$  skalárszorzat.

Értelmezve mindazt, ami itt elhangzott:  $M$  elemei a téridőpontok, hely- és időszempontból pontszerű „lehetőségek arra, hogy valami itt és ekkor történjen”.<sup>35</sup> Két ilyen közé lehet behúzni egy téridővektort.  $\tau$  minden téridővektorhoz egy időtartamot rendel, úgymond minden téridővektornak megmondja az „idő szempontú tulajdonságát” — ez nem valamifajta merőleges vetület ( $M$  nem egy euklideszi tér! nincs rajta egy négydimenziós skalárszorzat!), hanem csak egy valamifajta aspektusa, egydimenziós jellemzője a téridővektoroknak: az idő szempontú aspektusa. A nulla idő aspektusú téridővektorok neve térszerű vektor, a többiek az időszerű vektorok (jövőszerűek ill. múltszerűek, az idő aspektus előjelétől függően). Csak a térszerű vektorok  $S$  halmazán van egy euklideszi szerkezet,  $\mathbf{h}$ , mely távolságnégyzet dimenziójú, tehát minden térszerű vektorhoz egy távolság dimenziójú hosszt rendel. Bármely  $t$ -re az  $t$  időtartamú téridővektorok egy affin

<sup>34</sup> És akkor itt tekintsünk vissza az előző, 33. lábjegyzetre.

<sup>35</sup> A téridő nem események, történések halmaza, hanem csak a történések színtere, kerete, egyfajta háttérszerkezet. A vászon, amire a festmény készülhet.

hipersíkot alkotnak  $M$ -ben, minden ilyen affin hipersík egy háromdimenziós euklideszi affin tér az  $S$  alulfekvő vektortérrel és annak  $h$  skalárszorzatával.  $\mathbb{T}$  tehát nem egy egydimenziós altere  $S$ -nek, hanem  $\tau$  úgymond felszeleteli  $M$ -et párhuzamos szeletekre, egy csíkozást fest rá,  $\mathbb{T}$  pedig ennek a csíkozásnak a színskálája (képzeljük el, hogy minden csík a szivárvány színspektrumának egy-egy különböző színét kapja).



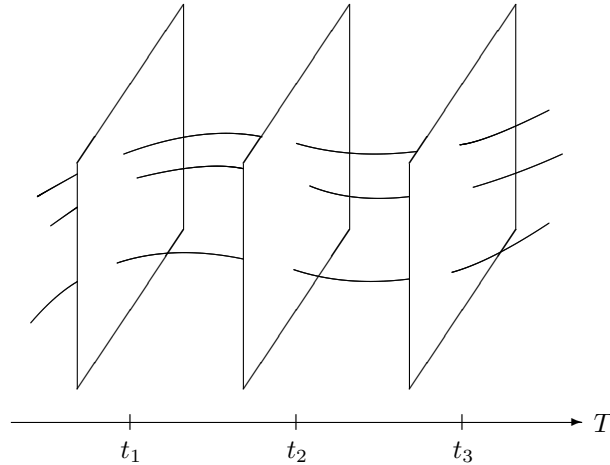
**1. ábra.** A nemrelativisztikus téridővektorok halmazának ( $M$ ) szemléltetése

$M$  duálisa,  $M^*$  nem azonosítható  $M$ -el, mert  $M$ -en nincs egy négydimenziós euklideszi szerkezetünk. Egy  $k \in M^*$  téridő-kovektor ugyebár definíció szerint  $M \rightarrow \mathbb{R}$ , mely függvénynek a megszorítása az  $M$ -nek az  $S$  részhalmazára  $S \rightarrow \mathbb{R}$ , azaz eleme  $S^*$ -nak. Jelölje  $\eta$  ezt a megszorítást, azaz azt az  $M^* \rightarrow S^*$  lineáris leképezést, mely minden téridő-kovektorhoz az  $S$ -re megszorítottját rendeli. Így  $\eta^* : S \rightarrow M$ , mely nem más, mint az a triviális leképezés, ami minden térszerű vektorhoz megmondja, hogy ő melyik  $M$ -beli vektor (azaz önmaga), tehát  $M$  identitás-leképezésének  $S$ -re vett megszorítása.

$M$  szerkezete öröklődik  $M$ -re. Két téridőpontot egyidejűnek hívunk, ha térszerű vektor köti őket össze. Az egymással egyidejű téridőpontok háromdimenziós euklideszi affin altereket rajzolnak ki  $M$ -ben az  $S$  alulfekvő euklideszi vektortér fölött. A „felszeletelés, csíkozás” tehát öröklődik  $M$ -re. Egy ilyen térszerű affin alteret nevezünk egy időpontnak. Az időpontok halmazát — tehát ezeknek az affin altereknek, szeleteknek a halmazát —  $T$ -vel jelöljük, mely egy egydimenziós irányított affin tér  $\mathbb{T}$  fölött. Az időpillanatok tehát nem valami elemi, „pici” objektumok, hanem térszerű irányban nagyon is kiterjedt objektumok: mindazon téridőpontok, melyek egymással egyidejűek.

Egy pontszerűnek tekinthető fizikai objektum mozgását, helyesebben téridőben való létezését egy világvonal modellezi: egy világvonal egy jövőszerű folytonos és kellően sokszor differenciálható görbe a téridőn (jövőszerű: minden érintővektora jövőszerű). A

világvonal tehát egy pontszerű létező sorsát, annak téridő-lenyomatát modellezi (ki milyen „csíkot húz” a téridőn, élete folyamán).



**2. ábra.** Az  $M$  nemrelativisztikus téridő, az időpontok, és a világvonalak

A világvonalak kitüntetett és kényelmes módon paramétereizhetők a  $T$  idővel: az így paraméterezett világvonalakat világvonalfüggvényeknek hívjuk, melyek tehát  $T \rightarrow M$  függvények. Mégpedig nem is akármilyenek: minden pontban az érintővektoruk, melyet abszolút sebességnek vagy négyessebességnek nevezünk, olyan, hogy a  $\tau$  leképezés (mely  $M \rightarrow \mathbb{T}$ , ezért egyben ugye  $M//\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  is,) az 1 értéket adja rájuk. A négyessebességek tehát olyan elemei  $M//\mathbb{T}$ -nek, amelyek nemcsak hogy jövőszerűek, de 1  $\tau$ -júak. Az ilyen vektorok halmazát  $V(1)$ -nek fogjuk jelölni, mely egy háromdimenziós euklideszi affin tér  $S//\mathbb{T}$  fölött.

Egy kiterjedt anyagi objektum, egy folytonos anyagi közeg sok anyagi pontból áll, melyek teljesen sűrűen helyezkednek el egymás mellett. Ennek modellje az lesz, hogy úgymond teljesen sűrűn egymás mellé pakolunk egymást nem metsző világvonalakat. Egy ilyen világvonalmezőnek tekinthetjük az érintővektorait, azaz minden téridőponthoz hozzárendeljük azt a négyessebesség-értéket, amennyi az adott téridőponton áthaladó világvonal ottani érintő négyessebessége. Egy  $M \rightarrow V(1)$  négyessebesség-mező rajzolódik tehát ki.<sup>36</sup> Fordítva is eljárhatunk: veszünk egy kellően sokszor differenciálható négyessebesség-mezőt a téridőn, és tekintjük ennek integrálgörbéit, azaz azon világvonalak seregét, mely világvonalfüggvények érintő négyessebességei az ott előírt négyessebesség-értéket. A két út ekvivalens, és utóbbi matematikailag kényelmesebb és egyszerűbb megfogalmazás, ezért egy folytonos közeg sorsának modelljét egy téridőn vett négyessebesség-mezővel fogjuk megadni.

<sup>36</sup> Ha közegünk nem tölti ki az egész téridőt, akkor a négyessebesség-mező is csak egy összefüggő részhalmaza  $M$ -nek.



Minden vonatkoztatási rendszer, (téridő-)megfigyelő is egy ilyen anyagi közeg valójában. Ha a valóságban nem is töltjük ki az egész téridőt sűrűn anyagi referencia-objektumokkal, azért rendelkezünk olyan eljárással, amellyel ezt ki tudjuk pótolni, meg tudjuk szerezni azokat az adatokat, amiket a hiányzó anyagi referencia-objektumok észlelnének és ahogy észlelnék. Működő illúziót tudunk felépíteni, mert különben nem tudna vonatkoztatni rendszerünk, nem tudna megfigyelni megfigyelőnk. A megfigyelő matematikai modellje tehát joggal egy sűrű, sima világvonalsereg, illetve választott matematikai megfogalmazásunkkal egy négyessebesség-mező. Ennek integrálgörbéit a megfigyelő térpontjainak nevezzük. A megfigyelő minden térpontja egy-egy anyagi referenciapontot modellez. Szemléletesen szólva, minden egyes térpont egy icipici törpe, mely rendelkezik egy órával, és mindig feljegyzi, ha valamikor valami őnála járt. (A modellben: mikor metszette világvonalát egy megfigyelendő anyagi pontot modellező világvonal.) Minden törpe a téridő egy fonálát figyeli meg, ebből áll össze a törperendszer mint megfigyelő számára az összkép. A megfigyelő<sup>37</sup> úgy figyel meg tehát egy világvonalat, hogy „törpének jelentése alapján” felállít egy függvényt: hogy melyik időpillanatban a megfigyelő melyik térpontjában járt a világvonal.<sup>38</sup> Ennek a függvénynek az idő szerinti deriváltja a megfigyelő szerinti relatív sebesség.

A megfigyelők közül kitüntetettek a merev (szabatosabb szóval: távolságőrző) megfigyelők, ahol bármely két térpont pillanatnyi távolsága állandó időben. Itt a pillanatnyi távolság úgy értendő, hogy a  $t$  időpillanatot mint háromdimenziós euklideszi affin teret elmetszi a két térpont mint világvonal, és a két metszéspontot összekötő térszerű vektor hosszáról beszélünk.

A távolságőrző megfigyelők közül pedig még speciálisabbak az inerciális avagy tehetetlenségi megfigyelők, melyeknél a négyessebességmező minden téridőpontban ugyanazt a négyessebesség-értéket veszi föl. A megfelelő világvonalak egymással párhuzamos egyenesek a téridőben. A téridő időszerű egyeneseit azért hívjuk inerciálisnak/tehetetlenséginak, mert ezek modellezik az egyenes vonalú egyenletes mozgásokat, amikkel a magukra hagyott testek mozognak (tehetetlenségi sajátmozgás). GALILEI relativitási elve valósítódik abban, hogy modellünkben minden tehetetlenségi világvonalat egyenértékű, nincs olyan, hogy „egyik áll, a többi mozog”, hanem mindet egy-egy  $V(1)$ -elem jellemez, mely elemek egyike sincs kitüntetve a többihez képest, és az általuk veze-

<sup>37</sup> amit az általános relativitáselméletben sokszor megfigyelőmezőnek hívnak

<sup>38</sup> A téridő nemrelativisztikus modelljében létezik egy módszer, ahogyan az egyes térpontokban telő idő (a törpék órái) összehangolhatóak, szinkronizálhatóak. A legnagyobb ismert jelterjedési sebesség, a vákuumbeli fénysebesség véges volta miatt a valóságban ilyen szinkronizálás nem lehetséges, nulla idejű jelküldés nem lehetséges. A speciális relativisztikus tapasztalatok alapján kiderült, hogy általában egy megfigyelő számára nem létezik értelemeszerű, kielégítő szinkronizálás, mert úgymond helyfüggően telik az idő a megfigyelő különböző térpontjaiban. A helyfüggő idő alól csak az inerciális/tehetetlenségi megfigyelők, és a nemtehetetlenségi megfigyelők egy szűk köre kivétel csak. Gravitáció görbítette téridőn pedig már ők sem.

tett egyenes világvonalak is mind egyenértékűek (mind valamilyen időszerű irányba halad a téridőben).

Az inerciális, és általánosabban a távolságőrző megfigyelők tere egy háromdimenziós euklideszi affin térnek bizonyul, mely tér (világvonalrendszer) neminerciális esetben gyorsul és/vagy forog/csavarodik a téridőben, míg az inerciális megfigyelőké eltolásszerűen egyenletesen halad. A nem-távolságőrző megfigyelők tere csupán egy háromdimenziós sokaság (a sokaságok fogalmát hamarosan szintén áttekintjük), de még csak nem is euklideszi sokaság (más néven RIEMANN-sokaság): ami metrikus szerkezet definiálható rajta, az időfüggő.

A téridőn értelmezett függvények analízise hasonló a vektortéren értelmezettekéhez (az pedig az  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezettekéhez), bár vannak bizonyos tartalmi különbségek, amik abból fakadnak, hogy  $\mathbb{R}^n$  egy euklideszi vektortér, az  $M$  alatt fekvő  $M$ -en viszont a ravaszabb  $\tau$  és  $h$  struktúrák vannak. Egy téridőn értelmezett, valós értékű skalárfüggvény (skalármező),  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  téridő-deriváltja,  $f \otimes D$  (ld. 39. lábjegyzet) minden egyes tér-időpontban egy  $M^*$  értéket vesz föl. Egy dimenziós skalár mennyiség értékű, azaz egy  $\mathbb{W}$  mértékegyes értékű skalárfüggvény téridő-deriváltja pedig  $M^* \otimes \mathbb{W} = \mathbb{W} \otimes M^*$  értékű. Az  $f \otimes D$  téridő-derivált azt mondja meg, hogy  $f$  mennyit változik helyileg a egy téridő-irányban. Megszorítottja, az  $\eta(f \otimes D) = (f \otimes D)\eta^*$  módon<sup>40</sup> definiált  $f \otimes \nabla$  pedig azt, hogy mennyit változik térszerű irányokban.  $\nabla$  tehát a térderiválás, mely tehát érdekes módon egy abszolút, azaz megfigyelőfüggetlen operáció, annak ellenére, hogy nincs abszolút tér, hanem minden megfigyelőnek saját különböző tere van. Abszolút térszerűség ugyanis van, és a térderiváláshoz ez elég.

$\nabla$  skalárfüggvényekre a gradiens, illetve vektorfüggvényekre a tenzori gradiens (ld. deriválttenzor). Egy  $f : M \rightarrow \mathbb{S}$  térszerű vektormező térderiváltja  $\mathbb{S} \otimes \mathbb{S}^*$  értékű, ezért értelmes rá a  $\text{tr}$  leképezés, és ennek eredménye a (hármás) divergencia vagy térdivergencia, jelölésben  $\nabla \cdot$  avagy  $\cdot \nabla$ .<sup>41</sup> Egy  $\mathbb{S}^*$  értékű, azaz térszerű kovektormező térderiváltja viszont  $\mathbb{S}^* \otimes \mathbb{S}^*$  értékű, ennek antiszimmetrikus részével definiálható a rotáció, jelölésben  $\nabla \times \cdot$ .  $\mathbb{S}$  értékű mező rotációja és  $\mathbb{S}^*$  értékű mező divergenciája csak áttételes,  $\mathbb{S}/\mathbb{L}$  és  $(\mathbb{S}/\mathbb{L})^*$  azonosítása után értelmezhető, mely azonosítás a  $h$  skalárszorzat révén hajtható végre.

Hasonló megállapítások tehetők arra a számunkra fontos esetre, amikor egy négysebesség-mezőt deriválunk: egy  $v : M \rightarrow V(1)$ , azaz  $v : M \rightarrow M//\mathbb{T}$  derivált-

<sup>39</sup> Skalárfüggvényekre írhatnánk egyszerűen  $Df$ -ként is, de az  $f \otimes D$  írásmód, amelyen konvenció a korábbi szakaszokban is szerepelt (pl.  $v \otimes \nabla_x$ ), vektori és tenzori értékű függvényekre a tenzoriális sorrendet is helyesen tükrözi.

<sup>40</sup>  $\eta$  definícióját ld. a 126. oldalon.

<sup>41</sup> Létezik a négyes vagy téridő-divergencia is: egy  $M$  négyesvektormező  $D$  téridő-deriváltjának nyoma.

ja minden téridőpontban  $M \otimes M^* // \mathbb{T}$  értékű.<sup>42</sup> Ennél azonban több is mondható, mivel  $V(1)$ -beli elemek különbsége  $S // \mathbb{T}$ -beli:  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V(1) \subset M // \mathbb{T}$  esetén  $\tau \mathbf{v}_1 = \tau \mathbf{v}_2 = 1$ , ezért  $\tau(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = 0$ . Emiatt egy sebességmező téridő-deriváltja  $S \otimes M^* // \mathbb{T}$  értékű. Térderiváltja pedig  $S \otimes S^* // \mathbb{T}$  értékű. Automatikusan értelmes tehát egy négyessebességmező térdivergenciája, rotációja viszont csak a  $\mathbf{h}$  térszerű euklideszi szerkezetre támaszkodó azonosítás után. Ugyanígy a (25) egyenletben használt  $(\mathbf{v} \otimes \nabla_x)^S$ -nek is csak  $\mathbf{h}$  bevonásával van értelme, célszerűen az

$$\frac{1}{2} [\mathbf{v} \otimes \nabla + \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{v} \otimes \nabla)^* \mathbf{h}] = \frac{1}{2} [\mathbf{v} \otimes \nabla + \mathbf{h}^{-1} (\nabla \otimes \mathbf{v}) \mathbf{h}] \quad (36)$$

módon. Az inerciális CAUCHY-deformáció így a

$$\dot{\mathbf{E}}^{\text{in. CAUCHY}} = \frac{1}{2} [\mathbf{v} \otimes \nabla + \mathbf{h}^{-1} (\nabla \otimes \mathbf{v}) \mathbf{h}] \quad (37)$$

fejlődési egyenletes definícióval válik téridő-kompatibilissé, ahol a felülponntal jelzett szubsztanciális derivált téridőn értelmezett mennyiségekre (pl. az EULER-leírással megadott kontinuumfizikai mezőkre)

$$\dot{\mathbf{T}} = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{D}) \mathbf{v}, \quad (38)$$

egy adott négyessebességmezőre vonatkozóan. (48) előtt azért áll a „célszerűen” szó, mert így  $\mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}} S // \mathbb{L} \rightarrow S // \mathbb{L}$  (azaz  $S \rightarrow S$ ) típusú tenzornak definiálódik. Ez azért a számunkra fizikailag érdekes eset, mert az ilyen tenzornak értelmes a sajátérték-problémája, ráadásul sajátvektorai  $S$  típusúak, azaz a téridő térszerű irányvektorai közé tartoznak. Így pedig téridő-kompatibilis módon fenn tudjuk tartani azt az értelmezést, hogy a deformációtenzor sajátvektorai térszerű megnyúlás-főirányok (v.ö. 103. oldal). Lenne három más lehetőségünk is, mert  $\mathbf{h}$  teljes átjárást biztosít  $S // \mathbb{L}$  és  $(S // \mathbb{L})^*$  között, tehát a már értelmesre kialakított (48) kombinációt beszorozhatjuk balról  $\mathbf{h}$ -val, jobbról  $\mathbf{h}^{-1}$ -el, vagy mindkettővel. Ennek a három másik lehetőségnek azonban egyike sem rendelkezne térszerű sajátvektorokkal.

### 6.3. SOKASÁGOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Át kell még tekintenünk a sokaságok számunkra fontos jellemzőit és alkalmazásait. Az itt következő összefoglaló nem fog minden pontos részletre kitérni, csak a tájékozódás szempontjából fontosabb jellegzetességekre.

Egy  $m$  dimenziós sima sokaság olyan halmaz (topologikus tér<sup>43</sup>), amelynek környezetei kölcsönösen egyértelmű és sima (végtelen sokszor deriválható) kapcsolatban vannak

<sup>42</sup> A speciális relativitáselméletben a négyessebességekre az  $\mathbf{u}$  jelölés a szokásos, a kontinuumkinematikában azonban keverhető lenne az  $\mathbf{u}$  elmozdulásfüggvénnyel, emellett a  $\mathbf{v}$  jelölés azt is sugallja, hogy ez a szokásos, inerciális megfigyelő szerinti  $\mathbf{v}$  relatív sebesség megfigyelőmentes négyes megfelelője.

<sup>43</sup> Az itt következő állítások egy része azt is megkövetelheti majd, hogy legyen HAUSDORFF-féle, második megszámlálható, esetleg egyszerűen összefüggő is. Ezek nem „vészes” igények.

egy  $m$  dimenziós affin tér alkalmas környezeteivel.<sup>44</sup> Egy  $\mathbb{R}^m$ , egy vektortér, egy affin tér tehát sokaság, de ezeken a „lineárisan feszes, sík” eseteken túl sokaság például egy affin tér (vektortér,  $\mathbb{R}^n$ ) egy kellően sima,  $m$  dimenziós részalmaza is, mint például egy két-dimenziós gömbfelület egy háromdimenziós euklideszi affin térben. Helyi koordinátázásnak hívjuk, amikor a sokaság egy környezetét  $\mathbb{R}^m$  egy környezetével hozzuk kölcsönösen egyértelmű kapcsolatba. Ekkor a környezetben belül minden sokaságpontot  $m$  darab valós koordinátával láttuk el.

Egy  $m$  dimenziós  $\mathcal{U}$  sokaságnak minden  $p$  pontjában létezik egy úgynevezett érintőtere, jelölésben  $T_p(\mathcal{U})$ , mely egy  $m$  dimenziós vektortér. Euklideszi (ld. alább) sokaság esetén — amilyen például a gömbfelület, — ez felfogható úgy, mint a sokaság  $p$  körüli környezetének a „kisimitása”, sík közelítése. Létezik azonban euklideszi szerkezet nélkül is, mint a  $p$ -beli összes lehetséges iránymenti deriválás halmaza. Affin tér érintőtere minden pontban ugyanaz a vektortér, mégpedig a saját alulfekvő vektortere. Általában azonban minden pontban más és más az érintőtér.

Egy  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  sokaságból sokaságba képező függvény  $p \in \mathcal{U}$  pontbeli deriváltja,  $(f \otimes \mathbf{D})(p)$  egy  $T_p(\mathcal{U}) \rightarrow T_{f(p)}(\mathcal{V})$  lineáris leképezés (már persze ha  $f$  deriválható). Láthatóan a sokaságból és/vagy sokaságba képező függvények analízise cirkalmasabb az affin tér eseténél, mert  $p$ -függő a derivált értelmezési tartománya és értékkészlete.<sup>45</sup> Vektormezőnek nevezünk egy olyan sima függvényt, amely a sokaság minden  $p$  pontjához hozzárendeli a  $T_p(\mathcal{U})$  érintőtér egy elemét, azaz egy ottani érintővektort. Ugyanígy egy tenzormező a  $T_p(\mathcal{U}) \otimes T_p(\mathcal{U})$  egy elemét rendeli hozzá  $p$ -hez, egy kovektormező  $T_p(\mathcal{U})^*$ -nek, az érintőtér duálisának vagy koérintőtérnek egy elemét, egy kotenzormező pedig  $T_p(\mathcal{U})^* \otimes T_p(\mathcal{U})^*$  egy elemét.

Az eddigiek alkalmazásaként emlékezzünk vissza a folytonos közegeknél mint téridő-megfigyelőknél elhangzott megjegyzésre, hogy általában egy megfigyelő tere — világvonalainak halmaza — csupán egy háromdimenziós sokaság szerkezetet kap a téridőtől, csak a megfigyelők egy speciális szűkebb körének tere nyer egy euklideszi affin tér szerkezetet. Azt a lépést viszont ne tegyük meg, hogy minden anyagi pontot a téridőben húzott világvonalával modellezzünk. Egy világvonal csak egy lenyomata, aspektusa az anyagi pont életének, de azon kívül, hogy e pont a téridőben valahogy létezik, számos más dolog is történhet még vele fizikailag (egyéb mennyiségei változnak, például a nála észlelhető hőmérséklet változik, vagy bármi egyéb történés is zajlhat). Ezért vezessünk inkább be egy  $\mathcal{C}$  háromdimenziós sokaságot maga a folytonos közeg mint fizikai realitás matematikai modelljeként.<sup>46</sup> A  $\mathcal{C}$  anyagi sokaság pontjaival sokminden történhet, ezek egyike az

<sup>44</sup> Sima: mindenhol, ahol környezetek egymással átfednek, az egyik kapcsolat a másikhoz képest legyen sima.

<sup>45</sup> Emiatt az  $f \otimes \mathbf{D}$  jelölés is leegyszerűsítő: a pontos részletekről ld. pl. [O'NEILL (1983)].

<sup>46</sup> Hiszen legyen három koordinátával paramétrezhető, mégpedig folytonosan, ugyanis a közegek fizikailag közel ilyenek. Például érintsünk egy fürdőszivacsot egyik lapjával piros festék felszínéhez:

a kötelező „feladatuk”, hogy valahogyan létezniük kell a téridőben, ezt egy leképezéssel adjuk meg, mely minden  $p \in C$  közegponthoz egy világvonalat, egy  $r(p)$  világvonalfüggvényt rendel, sima módon. Minden  $r(p)$  világvonalfüggvény ugyebár egy  $t \rightarrow M$  függvény, bizonyos célszerűségi okokból a  $t$  időpontban felvett értéke  $r_t(p)$  módon lesz jelölve. Az  $r_t : p \rightarrow r_t(p), C \rightarrow t$  leképezésről<sup>47</sup> fel fogjuk tenni, hogy kölcsönösen egyértelmű, amivel fizikailag azt mondjuk, hogy a közeg, áramlása során nem esik össze végtelen kicsire és nem tágul ki végtelen nagyra.  $r_t \otimes D$  nem más, mint a mozgásgradiens megfigyelőmentes, abszolút alakja. Hogy közegkinematikai formuláink kellemesebbek, beszédesebbek, jobban átláthatóak legyenek, érdemes lesz bevezetnünk azt a konvenciót, hogy az anyagi irányviszonyok szerinti mennyiségek, tehát a  $T_p(C)$  értékű vektormezők,  $T_p(C) \otimes T_p(C)$  értékű tenzormezők stb. felülhullámos ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) jelölést kapnak, és az anyagi sokaságon vett deriváltat (az anyagi térderiváltat) is  $D$  helyett  $\tilde{\nabla}$ -nak írjuk, tehát pl. az abszolút mozgásgradiens (létezésgradiens)  $r_t \otimes \tilde{\nabla}$ . A hullámtalan mennyiségek pedig a téridő-irányviszonyok szerinti ( $M, M \otimes M$  stb. értékűek), illetve speciálisan a térszerű irányviszonyok szerinti ( $S, S \otimes S$  stb. értékűek) lesznek, pl.  $h$ .

Most már minden hozzávalónak birtokában vagyunk, hogy megítéljük azt az anyagi objektivitás biztosítására tett kísérletet, amikor a téridőt az anyagi sokaságon keresztül próbálják meg leírni. Sokkal határozottabban látszik, hogy az anyagi sokaság és az idő DESCARTES-szorzata egy igencsak tökéletlen, fizikailag problémás téridő-pótlék. Általa egy nemtehetetlenségi ide-oda tekergő világvonalrendszeren keresztül nézik a világot, melyben pedig fizikailag oly kitüntetettek a tehetetlenségi mozgásformák. Ráadásul, sommásan szólva, fizikailag a közeg mozog — fejlődik, létezik — a téridőben, nem a téridő mozog — fejlődik, létezik — a közegben.<sup>48</sup> (Nem beszélve arról, amikor egynél több közeg van jelen egyszerre a téridőben, egymáson esetleg át is fedve — lásd többkomponensű közegek.)

Visszatérve az eszköztár ismertetéséhez, euklideszi vagy RIEMANN-sokaságnak nevezünk egy sokaságot, ha meg van adva rajta egy — euklideszi szerkezetnek vagy metrikának nevezett — pozitív definit és szimmetrikus kotenzormező, azaz minden  $p$  sokaságpontban egy skalárszorzat a  $p$ -beli érintőtéren (mely simán változik, ahogy  $p$  változik). Lehet ez a skalárszorzat valós szám értékű is, de lehet általánosabban  $\mathbb{W}^{(2)}$  értékű is, ahol  $\mathbb{W}$  egy mértékegyenes. A metrikát legtöbbször abban az alakjában lesz célszerű használnunk, amikor ő minden  $p$  pontban egy  $g : T_p(\mathcal{U}) // \mathbb{W} \rightarrow [T_p(\mathcal{U}) // \mathbb{W}]^*$  leképezés.

a festék felszívódik, magasságfüggő sűrűségeloszlással. Ezután elfordítva egy másik lapját érintsük sárga, majd harmadik oldalát kék festékhez. Így minden közegpont különböző „RGB” (RYB — Red-Yellow-Blue)-koordinátázást kapott, és közeli közegpontok közeli koordinátaértékeket.

<sup>47</sup> Sose feledjük,  $t$  a téridő egy szelete, mely egy háromdimenziós euklideszi affin tér. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden pontján halad át közegvilágvonal, azaz a közeg kitölti az egész téridőt. Ha nem tölti ki, akkor sokaság helyett peremes sokaságként modellezendő.

<sup>48</sup> Egy hétköznapi közegkinematikai példával: a takarító is a felmosóvizet lötytyinti ki az udvarra, nem az udvart a felmosóvízre.

A metrika egy adott pontban az ottani érintőtéren definiál távolság- és szögviszonyokat, az egész metrika mező pedig a sokaságon magán is, már amennyire ezek a fogalmak „begörbíthetőek” (hiszen egy RIEMANN-sokaság általában „görbül”). Így például értelmezhető a sokaságban haladó görbék ívhossza: egy görbének véve egy tetszőleges  $s : [a_1, a_2] \rightarrow \mathcal{U}$  valós paraméterezését, az  $s'(a)$  derivált egy  $s(a)$  sokaságpont-beli érintővektor, melynek hossza  $\|s'(a)\|_{g[s(a)]}$ . Ennek  $a$  szerint  $a_1$ -től  $a_2$ -ig vett integrálja függetlennek bizonyul a paraméterezés módjától, és ez az integrál a görbe ívhossza. Két sokaságpontot (pl.  $p$ -t és  $q$ -t) sok módon lehet görbékkel összekötni, ezek közül a legkisebb görbehosszat nevezzük a két pont távolságának, jelölésben  $d(p, q)$ . Egymást metsző görbék metszéspontbeli szöge pedig a metszéspontbeli érintővektoraik által bezárt szög.

A szemlélet számára kézzelfoghatóbb a távolság és szög, mint az euklideszi skalárszorzat. Ha a  $d$  kétváltozós távolságfüggvényt ismerjük, abból a metrikát is rekonstruálhatjuk, a távolságfüggvényt második változójában kétszer deriválva, és a két pontot egybeejtve, azaz jelöléssel

$$\mathbf{g}(p) = \frac{1}{2} \left\{ [q \mapsto d^2(p, q)] \otimes \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \right\} (p), \quad (39)$$

vagy egy nagyon más jelölésvilág szerint is megadva,

$$\mathbf{g}(p) = \frac{1}{2} \partial_q^2 d^2(p, q) \Big|_{q=p}. \quad (40)$$

A távolságfüggvény és a metrika tehát ekvivalens egymással. A továbbiakban az utóbbit lesz érdemes használnunk, mert nem két-, hanem csak egyváltozós, tehát lokális mennyiség.

A metrika egyébként, az általa definiált távolságviszonyok alapján érthető módon, egy térfogatfogalmat is bevezet-kitüntet a sokaságon, ez a  $\sqrt{|\mathbf{g}|}$  módon jelölt térfogati mérték  $\mathbb{W}^{(m)}$  értékű (ahol  $m$  a sokaság dimenziója).

Amint az már elhangzott, egyelőre heurisztikus megjegyzésként, egy RIEMANN-sokaság általában nem „sík”, hanem „görbült”, a görbülése azonban pontosan és mennyiségileg értelmezhető is, a metrika helyfüggéséből leolvasható módon. Ez egy  $T_p(\mathcal{U}) \otimes T_p(\mathcal{U})^* \otimes T_p(\mathcal{U})^* \otimes T_p(\mathcal{U})^*$  típusú vegyes  $\mathbf{R}^{\text{RIEMANN}}$  tenzormezővel tehető meg, melynek neve görbületi vagy RIEMANN-tenzor. Láthatóan a RIEMANN-tenzor egy meglehetősen bonyolult objektum, létezik szerencsére egy vele ekvivalens jellemzése a görbületnek, a kétdimenziós vagy síkgörbület, amely érintősíkokhoz rendel skalárt. Másrészt, a RIEMANN-tenzorból származtatható egy következménye, az első és negyedik tenzori komponense egybeejtésével (nyomával) kapott  $\mathbf{R}^{\text{RICCI}}$  RICCI-tenzor.  $m \leq 3$  dimenziós RIEMANN-sokaságon ez az egyszerűbb, „kétindexes”, azaz  $T_p(\mathcal{U})^* \otimes T_p(\mathcal{U})^*$  típusú szimmetrikus RICCI-tenzor is egyértelműen meghatározza a síkgörbületet, és így a RIEMANN-tenzort [O'NEILL (1983), 88. o.]<sup>49</sup>.

<sup>49</sup> Az oldal legfölső képletét mint  $m$  darab egyenlet alkotta lineáris egyenletrendszer  $m \leq 3$  ese-

A  $\mathbf{g}_{\mathcal{U}}(p) : T_p(\mathcal{U})/\mathbb{W} \rightarrow [T_p(\mathcal{U})/\mathbb{W}]^*$  metrikájú  $\mathcal{U}$  RIEMANN-sokaságot a  $\mathbf{g}_{\mathcal{V}}(q) : T_q(\mathcal{V})/\mathbb{W} \rightarrow [T_q(\mathcal{V})/\mathbb{W}]^*$  metrikájú  $\mathcal{V}$  RIEMANN-sokasággal összekötő  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  kölcsönösen egyértelmű, sima leképezést izometriának hívják, ha úgymond a metrikát is átszállítja, azaz minden  $p$ -re

$$\mathbf{g}_{\mathcal{U}}(p) = [(f \otimes \mathbf{D})(p)]^* \mathbf{g}_{\mathcal{V}}(f(p)) (f \otimes \mathbf{D})(p), \quad (41)$$

azaz

$$\mathbf{g}_{\mathcal{U}} = (f \otimes \mathbf{D})^* (\mathbf{g}_{\mathcal{V}} \circ f) (f \otimes \mathbf{D}). \quad (42)$$

A továbbiakban átláthatóbbá fogja tenni képleteinket, ha az összetett függvény jelölését elhagyjuk, amikor ez nem okoz zavart, azaz amikor a változók könnyen kitalálhatóak, tehát például azt írjuk, hogy

$$\mathbf{g}_{\mathcal{U}} = (f \otimes \mathbf{D})^* \mathbf{g}_{\mathcal{V}} (f \otimes \mathbf{D}). \quad (43)$$

Belátható, hogy az izometriák átszállítják a RIEMANN-tenzort, a síkgömbületet és a RICCI-tenzort is (ezek átszállításai is hasonló, értelemszerű, lineáris műveletek). Az is teljesül, hogy izometriák kompozíciója is izometria.

A nulla görbületi tenzorú RIEMANN-sokaságokat sík sokaságnak nevezik. Ilyenek például az euklideszi affin terek. Egy tétel szerint [DIEUDONNÉ (1976), 408. o., 20.23.5 tétel] pontosan azok a RIEMANN-sokaságok izometrikusak sík RIEMANN-sokasággal, amelyek síkgömbülete nulla (így RIEMANN-tenzora is nulla). A fentiek alapján  $m \leq 3$  dimenzióban ugyanez a RICCI-tenzorral is igaz: pontosan a nulla RICCI-tenzorúak izometrikusak síkkal.

A hamarosan következő alkalmazásainkra kikacsintva, nevezzünk metrikus segédpotenciálnak egy olyan izometriát, mely egy sík  $\mathcal{U}$  RIEMANN-sokasághoz egy  $E$  euklideszi affin teret társít. Rögzített  $\mathcal{U}$  és  $E$  esetén ez az izometria  $E$  távolságtartó transzformációi (az eltolások és forgatások) erejéig határozatlan — ugyanis pontosan ezek  $E$  önmagával vett izometriái, márpedig bármely két (azonos dimenziójú) euklideszi affin tér izometrikus egymással, lévén nulla görbületűek (és izometriák kompozíciója ugyebár szintén izometria).

Az izometriákkal történő átszállítás egy gyors és fontos közegkinematikai alkalmazása a következő. Ahogy a közegpontok mozognak (léteznek) a téridőben, a  $p$  és  $q$  közegpontok  $t$  időpillanatbeli távolsága a téridőben

$$d_t(p, q) = \|r_t(q) - r_t(p)\|_{\mathbf{h}}. \quad (44)$$

tén meg lehet oldani a bázisvektor-párok kijelölte  $m(m-1)/2$  érintősíkhöz tartozó síkgömbület-értékekre.

Ehhez a távolságfüggvényhez a (39) módon rendelhető  $C$ -n egy metrika, jelöljük ezt  $\tilde{\mathbf{h}}_{r_t}$ -ként.  $\tilde{\mathbf{h}}_{r_t}$  tehát nem más, mint a közeg  $r$  mozgása során a  $t$  pillanatban a téridőben realizálódott távolság- és szögviszonyok. Ha megvizsgáljuk ezt a  $C$ -n levő metrikát, definíciója alapján azt találjuk, hogy a 132. oldalon bevezetett  $r_t$  leképezés izometriaként kapcsolja őt össze a  $t$ -n élő  $\mathbf{h}$  metrikával:

$$\tilde{\mathbf{h}}_{r_t} = (r_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} (r_t \otimes \tilde{\nabla}) \quad (45)$$

[v.ö. (43)], mely egy  $p$  közegpontban  $T_p(C) // \mathbb{L} \rightarrow [T_p(C) // \mathbb{L}]^*$  leképezés. Tulajdonképpen természetes is, amit kaptunk: a pillanatnyi távolságokat  $\mathbf{h}$  adja meg, a téridőn — annak pillanatnyi szeletén — közvetlenül, az anyagi irányviszonyokra átszámítva pedig a létezésgradiens révén (45)-tel, vagy ami ugyanaz kell legyen: a mozgás (téridő-létezés) ismeretében (44)-gyel. A továbbiakban nevezzük  $\tilde{\mathbf{h}}_{r_t}$ -t a pillanatnyi metrikának, pontosabban a pillanatnyi metrika anyagi alakjának. A pillanatnyi metrika téridő-alakja pedig természetesen  $\mathbf{h} : \mathbf{S} // \mathbb{L} \rightarrow (\mathbf{S} // \mathbb{L})^*$  marad.

## 7. A RUGALMAS ALAKVÁLTOZÁSOK LEÍRÁSA

### 7.1. MENNYISÉGÜNK DEFINÍCIÓJA ÉS ALAPTULAJDONSÁGAI

Miután áttekintettük az összes szükséges eszközt, segítségükkel és eddigi alkalmazásaik felhasználásával nekifoghatunk a rugalmas alakváltozások leírásának.

A célunk itt az, hogy a 107. oldalon kifejtett okokból, a szilárd közegeknél tapasztalható rugalmas belső erő (feszültség) erőtörvényéhez (konstitúciós összefüggéséhez) egy kinematikai mennyiséget keresünk, amittől az ébredő rugalmas feszültség függene. Namármost, a nemrelativisztikus mechanikában a testek közötti párkölcsönhatások általában jó közelítéssel pillanatszerű távolhatással működő, a pillanatnyi távolságtól függő erők. Ezért a szilárd közegben ébredő helyi rugalmas feszültséget is a helyi pillanatnyi távolságviszonyok függvényének ésszerű várni. A 133. oldalon láttuk, hogy a távolságviszonyok ekvivalensek egy RIEMANN-metrikával, a 135. oldalon pedig, hogy konkrétan a közegmozgás pillanatnyi távolságviszonyai a (45)-ben mutatott  $\tilde{\mathbf{h}}_{r_t}$  metrikával ekvivalensek.

Azt gondoljuk továbbá (ld. a 107. oldalt, és az ennek az alszakasznak a végén tett megjegyzéseket is), hogy szilárd közegeknek van egy nyugalmi elrendeződése, alapszerkezete, amelyet a közeg, ha lehetősége van rá, igyekszik fölvenni. Eme nyugalmi távolságviszonyokhoz is tartozna egy metrika, a közeg nyugalmi metrikája. Jelöljük ezt  $\tilde{\mathbf{g}}$ -mal, az anyagi irányviszonyok szerint értve, azaz

$$\tilde{\mathbf{g}}(p) : T_p(C) // \mathbb{L} \rightarrow [T_p(C) // \mathbb{L}]^*. \quad (46)$$



Ez a metrika a téridő irányviszonyaiba átszámítva — mely átszámítás olyan, mint (45), csak most a fordított irányban —, a téridőben a  $t$  időpillanatban a

$$\mathbf{g}_{r_t} = \left[ (r_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \right]^* \tilde{\mathbf{g}} (r_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} : \mathbf{S}/\mathbb{L} \rightarrow (\mathbf{S}/\mathbb{L})^* \quad (47)$$

RIEMANN-metrika, mely továbbra is  $p \in C$  változójú. Egyelőre maradhatunk ugyanis ennél az ún. LAGRANGE-leírásnál, ráérünk a legvégén áttérni a téridő-változójú, azaz EULER-leírásra, az  $r_t$  változótranszformációval.  $\mathbf{g}_{r_t}$  tehát a nyugalmi metrika téridőbeli megjelenése az adott közegmozgás esetén. Maga  $\tilde{\mathbf{g}}$  időfüggetlen, téridőbeli  $\mathbf{g}_{r_t}$  megjelenése azonban időfüggő.

A rugalmas deformáció ügyében pedig azt kívánjuk egy valamilyen mennyiséggel jellemezni, hogy hogyan térnek el a pillanatnyi távolságviszonyok a nyugalmiétól. Ez a jellemző a téridő irányviszonyai szerint legyen megfogalmazva, ne az anyagi irányviszonyok szerint, mert a téridő a fizikailag biztos háttér, keret.

További indokolt elvárás leendő mennyiségünkől, hogy kis deformációkra adja ki a CAUCHY-deformációtenzort. Közelebbről, annak  $\mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}}$  változatát sikerült téridőszempontból kielégítő módon értelmezni [a (37) fejlődési egyenlettel], tehát őt lenne jó visszakapni határesetként. Mint a 139. oldalon láttuk, a szempontjainknak megfelelő  $\mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}}$  egy  $\mathbf{S}/\mathbb{L} \rightarrow \mathbf{S}/\mathbb{L}$  értékű tenzormező. Átszállítva az anyagi irányviszonyokra pedig  $T_p(C)/\mathbb{L} \rightarrow T_p(C)/\mathbb{L}$  értékű a  $p$  közegpontban. Ezért véges rugalmas deformációt mérő mennyiségünk szintén legyen  $\mathbf{S}/\mathbb{L} \rightarrow \mathbf{S}/\mathbb{L}$  értékű, avagy átszállítva  $T_p(C)/\mathbb{L} \rightarrow T_p(C)/\mathbb{L}$  értékű, hogy egy adott határesetben egybe tudjanak esni.

Ilyen mennyiséget építeni nem is lehet majd sok módon. Ugyanis fizikai szituációinkban két kitüntetett metrikánk is van — a pillanatnyi és a nyugalmi —, emiatt egyiket se indokoltabb vektortér és duálisa beazonosítására használni. Ha pedig nincs ilyen azonosításunk, az határozottan megszorítja a lehetőségeket.

Miután minden körülményt áttekintettünk, nekifoghatunk rugalmas deformáltságot jellemző mennyiségünk felállításának. Ha a közeg irányviszonyai szerint fogalmazunk, akkor a pillanatnyi távolságviszonyokat megadó  $\tilde{\mathbf{h}}_{r_t}(p) : T_p(C)/\mathbb{L} \rightarrow [T_p(C)/\mathbb{L}]^*$  leképezést szeretnénk viszonyítani a  $\tilde{\mathbf{g}}(p) : T_p(C)/\mathbb{L} \rightarrow [T_p(C)/\mathbb{L}]^*$  leképezéshez, és az eredmény legyen  $T_p(C)/\mathbb{L} \rightarrow T_p(C)/\mathbb{L}$  leképezés. Ezt az

$$\tilde{\mathbf{A}}_{r_t} := \tilde{\mathbf{g}}^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_{r_t} \quad (48)$$

kombináció valósítja meg. A téridő irányviszonyai szerint megfogalmazott célkitűzésnek pedig épp ennek átszállítottja,

$$\mathbf{A}_{r_t} = \mathbf{g}_{r_t}^{-1} \mathbf{h} \quad (49)$$

tesz eleget. Elvi-lényegi célra a téridő-irányviszonyok szerinti alakot fogjuk preferálni, az anyagi irányviszonyokat pedig csak átmeneti, technikai célokra fogjuk használni.

Ha van egy olyan időpillanat, amikor a pillanatnyi távolságviszonyok épp megegyeznek a nyugalmi távolságviszonyokkal, akkor  $\mathbf{g}_{r_t} = \mathbf{h} \implies \mathbf{A} = \mathbf{I}_S$ , ahol  $\mathbf{I}_S$  a térszerű vektorok egységtenzora. Ez arra látszik utalni, hogy  $\mathbf{A}$  nem a deformáció (mely nyugalmi állapotban nulla kell legyen), hanem az alakváltozás (mely nyugalmi állapotban egységtenzor kell legyen) szempontjainknak megfelelő általánosítása/értelmezése. Ezért a *rugalmas alaktenzor* (röviden: alaktenzor) nevet adhatjuk neki.

Ha kibontjuk a rugalmas alaktenzor definícióját,

$$\mathbf{A}_{r_t} = (r_t \otimes \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{g}}^{-1} (r_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h}, \quad (50)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{r_t} = \tilde{\mathbf{g}}^{-1} (r_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} (r_t \otimes \tilde{\nabla}) \quad (51)$$

[v.ö. (45) és (47)], leolvashatjuk, hogy metrikusan szimmetrikusak (ld. 123. o.), mégpedig  $\mathbf{A}_{r_t}$   $\mathbf{h}$ -szimmetrikus,  $\tilde{\mathbf{A}}_{r_t}$  pedig  $\tilde{\mathbf{g}}$ -szimmetrikus.

Az (50) egyenletben szerepel  $\tilde{\mathbf{g}}$ , mely a téridőn végezhető méréseink révén közvetlenül nem hozzáférhető. Nem kell azonban megijednünk: ugyanúgy, ahogy az eddigi deformációtenzorokat is fejlődési egyenlettel fogalmaztuk meg, rugalmas alaktenzorunk esetén is elegendő, ha van rá egy olyan fejlődési egyenlet, amelyben minden egyéb mennyiség csupa kimérhető kinematikai hozzávaló<sup>50</sup>. A fejlődési egyenlet megoldásai közül pedig kezdeti feltétellel rögzíthetjük az adott szituációra érvényes megoldást. Képezve (50) szubsztanciális időderiváltját, mely egyszerűen a  $t$  szerinti derivált<sup>51</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_{r_t} &= (\mathbf{v}_t \otimes \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{g}}^{-1} (r_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} + (r_t \otimes \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{g}}^{-1} (\mathbf{v}_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} = \\ &= (\mathbf{v}_t \otimes \tilde{\nabla}) (r_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \mathbf{A}_{r_t} + \mathbf{A}_{r_t} \mathbf{h}^{-1} \left[ (r_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \right]^* (\mathbf{v}_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} = \\ &= (\mathbf{v}_t \otimes \nabla) \mathbf{A}_{r_t} + \mathbf{A}_{r_t} \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{v}_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (52)$$

felhasználva, hogy a  $\tilde{\nabla}$  és a  $\nabla$  deriválások közötti átjárás az  $r_t$  mint változótranszformáció deriváltja,  $r_t \otimes \tilde{\nabla}$ . Egy olyan fejlődési egyenletet kaptunk tehát, melyben valóban csak téridőn kimérhető mennyiségre, a négyessebesség-mező térderiváltjára van szükség.

Érdekes — bár tulajdonképpen nem is olyan szörnyen meglepő — észrevétel, hogy az (52) egyenlet ugyanolyan, mint a bal CAUCHY-GREEN alakváltozási tenzor (28) fejlődési egyenlete. Rugalmas alaktenzorunk tehát a bal CAUCHY-GREEN alakváltozási tenzor „feljavítása”.

A kis deformáltság esete  $\mathbf{A}_{r_t} \approx \mathbf{I}_S$ , ahol e két lineáris leképezés közelsége úgy értenődő, hogy különbségük egy alkalmas normája jóval kisebb  $\mathbf{I}_S$  normájánál. Esetünkben ezt

<sup>50</sup> Pontosabban valami teendő lesz még, ezt a következő alszakasz fogja elvégezni.

<sup>51</sup> Ne feledjük,  $\mathbf{A}$  egyelőre a LAGRANGE-leírásban van megadva, így egy állandó közegpont mellett vett deriváltról beszélünk. Az adódó fejlődési egyenlet már téridőn vett differenciálegyenletként is tekinthető lesz, pusztán triviális módon át kell majd térni változótranszformációval az EULER-leírásra (annak téridő-megfelelőjére), a  $p \mapsto r_t(p)$  leképezéssel. Téridőn a szubsztanciális időderiváltat (38) definiálta.

egyszerűen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy  $\mathbf{A}_{r_t}$  sajátértékei közel kell legyenek 1-hez. Tekintve (52)-t  $\mathbf{A}_{r_t} - \mathbf{I}_S$  vezető rendjében, az eredmény

$$(\mathbf{A}_{r_t} - \mathbf{I}_S) \approx (\mathbf{v}_t \otimes \nabla) + \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{v}_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h}, \quad (53)$$

melyet (37)-tel összevetve láthatjuk, hogy a kis deformáltság határesetében valóban a CAUCHY-deformáltságtenzort kapjuk vissza:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{A}_{r_t} - \mathbf{I}_S) \approx \mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}}, \quad (54)$$

mert adott kezdeti feltételből a két fejlődési egyenlet vezető rendig ugyanabba a tenzorba fejleszt, amíg a kis deformáltság tartományában maradunk.

$\mathbf{A}$  definíciója alapján belátható, hogy

$$\det \sqrt{\mathbf{A}_{r_t}} = \sqrt{\det \mathbf{A}_{r_t}} = \frac{\sqrt{|\tilde{\mathbf{h}}_{r_t}|}}{\sqrt{|\tilde{\mathbf{g}}|}} = \frac{\sqrt{|\mathbf{h}|}}{\sqrt{|\mathbf{g}_{r_t}|}}, \quad (55)$$

azaz a pillanatnyi és a nyugalmi térfogati mérték hányadosát kapjuk. Ez a hányados adja meg a szilárd közeg *kiterjedtségét* (jelölje ezt  $\Lambda$ ), mely a nyugalmi állapotban, a nyugalmi távolságviszonyok esetén 1. Ennek egy függvényeként keresnénk majd a 109. oldalon már emlegetett *tágultságot* (amit jelöljön majd  $\theta$ , amikor a függvényalakról már döntöttünk), mely nyugalmi állapotban 0. Az (55) eredmény már onnan is megsejthető, hogy  $\mathbf{A}$  a bal CAUCHY-GREEN alakváltozási tenzor rendbetett rugalmas kinematikai változata, és  $\det \sqrt{\mathbf{C}_L^{(2)}} = \det \mathbf{F}$ , mely a térfogatváltozást méri [ld. a 3. szakaszt, különösen pedig (17)-et és szöveggörnyezetét].

Hogy ne törje meg az alaktenzor felállításának gondolatmenetét, ezért csak itt, utána, az alszakasz végén célszerű még egy kiegészítő fizikai megjegyzést tenni. Nevezetesen azt, hogy az alapszerkezet léte egyfajta memóriajelenség is, mert amikor a közeg nem az alapelrendezésében van, akkor is emlékszik rá, hogy ha békén hagynák, milyen elrendeződést szeretne felvenni. Az alapszerkezet léte tehát nem csupán kinematikai, hanem részben konstitúciós jellegű információ, és részben dinamikai információ a közegről. De ez nem baj. Igazából már az is konstitúciós jellegű információ, hogy közegünk nem merev test, és nem is pontszerű test. Másrészt, már a téridő modellje sem tisztán kinematika, abba is került beépítésre dinamikai információ is: hogy a magukra hagyott testek mozgása kitüntetett, és egymással egyenértékű, és egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgás. A magára hagyás ugyanis dinamikai körülmény. Szerencsére ennél többről, azaz arról, hogy mi és hogyan szabályozza a nem magukra hagyott testek mozgását, nem kellett beszélnünk. A szilárd közegeknél sem kell arról nyilatkoznunk, hogy milyen körülmények között és hogyan tudnak tartani az alapelrendezésükhöz. Annyira van csak szükségünk, hogy létezik alapelrendezésük, ezt fel tudják venni, és hogy ez az alapszerkezet a nyugalmi távolságviszonyokat szabja meg.

## 7.2. A KOMPATIBILITÁSI FELTÉTEL

A rugalmas alaktenzor fejlődési egyenletéhez elegendő a téridőn beszerezhető-kimérhető kinematikai információk (konkrétan a négyessebesség és gradiense), ez azonban még nem elég ahhoz, hogy a téridőn dolgozva minden szükséges dolgot el tudjunk intézni. Azt a kérdést még fel kell tennünk, hogy a rugalmas alaktenzor egy kezdeti feltétele lehet-e tetszőleges, vagy ha nem, milyen megszorítás van rá? Átfogalmazva, a kérdés tulajdonképpen a következő: a  $\tilde{g}$  nyugalmi metrika lehet-e tetszőleges, vagy ha nem, milyen megszorítás van rá?

A  $\tilde{g}$  alapszerkezettől elvárjuk, hogy a közeg ki tudja magát rúgni ebbe a nyugalmi elrendeződésbe, a nyugalmi távolságviszonyokba. Ez azt jelenti, hogy  $\tilde{g}$  olyan kell legyen, hogy a pillanatnyi metrika képes legyen — alkalmas körülmények biztosította alkalmas folyamat, közegmozgás esetén — ezzel a nyugalmi metrikával megegyezni. Kicsit konkrétan, létezessen olyan  $\bar{r}$  folyamat, és olyan  $\bar{t}$  időpillanat, amelynek során és amikor a pillanatnyi metrika megegyezik a nyugalmival. Figyelem: nem tételezzük föl, hogy a közeg valóban olyan mozgású lesz, hogy lesz ilyen időpillanat. A közeg egyféle. Szilárd közegnek az alapszerkezete is adott. E közegnek a téridőn való mozgása viszont rengetegféle lehet.  $\tilde{g}$  az *elvi lehetőségét* kell biztosítsa annak, hogy szerencsés esetben realizálódhasson, mint pillanatnyi metrika. Hogy aztán a közeg megvalósuló mozgása ilyen lesz-e, vagy sem, az más kérdés.

Felírva tehát az alapszerkezetre ezt a követelményt, létezessen olyan  $\bar{r}$  és  $\bar{t}$ , hogy

$$\tilde{h}_{\bar{r}\bar{t}} = \tilde{g}, \quad \text{azaz kibontva,} \quad (\bar{r}_{\bar{t}} \otimes \bar{\nabla})^* \mathbf{h} (\bar{r}_{\bar{t}} \otimes \bar{\nabla}) = \tilde{g}. \quad (56)$$

Összevetve ezt (43)-mal, azt ismerhetjük fel, hogy  $\bar{r}_{\bar{t}}$  izometria a  $\bar{t}$  mint háromdimenziós euklideszi affin tér (ld. 126. o.) és a nyugalmi metrikával RIEMANN-sokasággá tett  $C$  anyagi sokaság között. Mégpedig ez az izometria egy sík sokasággal kapcsol össze, ezért a nyugalmi metrikához tartozó RICCI-tenzor nulla, amint az a 134. oldalon láttuk. Az ugyanott bevezetett szóhasználattal,  $\bar{r}_{\bar{t}}$  a  $\tilde{g}$  metrika egy metrikus segédpotenciálja.

Szintén az ottani tárgyalásban hangozott el, hogy bármely két azonos dimenziójú euklideszi affin tér izometrikus, továbbá hogy izometriák kompozíciója is izometria, és az is, hogy az izometriák átszállítják a RICCI-tenzort is. Ezért egy valóban megvalósuló  $r$  mozgás esetén a nulla RICCI-tenzorú nyugalmi metrikának egy  $t$  időpillanatra mint háromdimenziós euklideszi affin térre átszállítottja,  $\mathbf{g}_{r_t}$  is nulla RICCI-tenzorú. A  $t$  affin teret mint sokaságot ugyebár  $\mathbf{g}_{r_t}$  is egy RIEMANN-sokasággá teszi, nemcsak a  $t$ -hez természetes módon tartozó  $\mathbf{h}$ . Történetesen tehát  $\mathbf{g}_{r_t}$  is nulla RICCI-tenzorú sokasággá teszi  $t$ -t. Az tehát, hogy a nyugalmi metrika képes megvalósuló pillanatnyi metrika lenni, arra fogalmazódott át, hogy  $\mathbf{g}_{r_t}$  RICCI-tenzora nulla  $t$ -n mint affin téren (nem törődve most a  $t$ -hez tartozó  $\mathbf{h}$  euklideszi szerkezettel).

A RICCI-tenzor számolásokra praktikus alakját, és az ahhoz szükséges CHRISTOFFEL-mennyiségeket a sokaság egy koordinátázásában szokás megadni [O'NEILL (1983)], de affin téren koordinátázás nélkül is megadható:

$$\mathbf{R}^{\text{RICCI}} = \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} - (\text{tr}_{1,3} \mathbf{\Gamma}) \otimes \nabla + (\text{tr}_{1,3} \mathbf{\Gamma}) \mathbf{\Gamma} - \text{tr}_{1,3} (\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}), \quad (57)$$

ahol

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{r_t}^{-1} [\mathbf{g}_{r_t} \otimes \nabla + (\mathbf{g}_{r_t} \otimes \nabla)^{S_{1,3}} - \nabla \mathbf{g}_{r_t}], \quad (58)$$

és a 102. oldalon bevezetett  $S_{1,3}$  jelöléshez hasonlóan  $\text{tr}_{1,3}$  az első és harmadik tenzori komponensben („indexben”) vett nyomot, egybeejtést jelenti (a hamarosan felbukkanó pl.  $\text{tr}_{1,3;2,5}$  jelölés pedig az első és harmadik komponens egybeejtését, emellett a második és ötödik komponens egybeejtését fogja jelenteni).

Mivel  $\mathbf{g}_{r_t} = \mathbf{h} \mathbf{A}_{r_t}^{-1}$  [ld. (49)], így  $\mathbf{R}^{\text{RICCI}} = \mathbf{0}$  követelményünk átfogalmazható egy  $\mathbf{A}_{r_t}$ -ra vonatkozó egyenletre. Ezt az egyenletet a rugalmas alaktenzor kompatibilitási feltételének fogjuk nevezni. Az átfogalmazás és képletrendezés hosszadalmas számításait mellőzve, ez a követelmény a következőnek adódik — a rövideg kedvéért  $\mathbf{A}_{r_t}$ -t  $\mathbf{A}$ -ként írva a továbbiakban:

$$\begin{aligned} & \text{tr}_{1,5;3,4} [\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \otimes \nabla) (\mathbf{A} \otimes \nabla)] + 2\mathbf{h} \mathbf{A}^{-1} \text{tr}_{1,2} [\mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} (\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{A})] \mathbf{A}^{-1} + \\ & + 2\mathbf{h} \text{tr}_{2,3} [\mathbf{A}^{-1} \otimes (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{h}^{-1} (\nabla \otimes \mathbf{A})] \mathbf{A}^{-1} - 2\mathbf{h} \mathbf{A}^{-1} \text{tr}_{2,4} [(\mathbf{A} \otimes \nabla \otimes \nabla) \mathbf{h}^{-1}] + \\ & + 2\text{tr}_{1,4;3,5} [\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \otimes \nabla) (\mathbf{A} \otimes \nabla)] + \text{tr}_{1,2;3,5} [\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \otimes \nabla) (\mathbf{A} \otimes \nabla) \mathbf{A}^{-1}] - \\ & - 2\mathbf{h} \mathbf{A}^{-1} \text{tr}_{2,5;3,6} [(\mathbf{A} \otimes \nabla) \mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} (\nabla \otimes \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1}] \mathbf{A}^{-1} + \quad (59) \\ & + 2\text{tr}_{2,4} [(\nabla \otimes \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \otimes \nabla)] \mathbf{A}^{-1} - 3\text{tr}_{2,6;3,5} [(\nabla \otimes \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \otimes \nabla) \mathbf{A}^{-1}] - \\ & - 2[\nabla \otimes (\nabla \cdot \mathbf{A})] \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{h} \text{tr}_{3,4;2,5} [\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \otimes \nabla) \mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} (\nabla \otimes \mathbf{A})] \mathbf{A}^{-1} + \\ & + 2\text{tr}_{1,2} [\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \otimes \nabla \otimes \nabla)] - 2\mathbf{h} \mathbf{A}^{-1} \text{tr}_{2,4;3,5} [(\mathbf{A} \otimes \nabla) \otimes \mathbf{h}^{-1} (\nabla \otimes \mathbf{A})] \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ez egy meglehetősen bonyolult, nemlineáris egyenlet. Ennek a kompatibilitási feltételnek tegeyen tehát eleget  $\mathbf{A}$  egy kezdeti feltétele, és akkor a fejlődési egyenlet biztosítja, hogy később is eleget fog neki tenni.

Érdemes megnézni, hogy milyen ennek a kompatibilitási feltételnek a kis deformált-ságú határesetete. (59)-ben a tagok kétfélék: az egyik fajta  $\mathbf{A}$  valamilyen második deriváltját tartalmazza, a másik  $\mathbf{A}$  első deriváltját, de két ilyen szorzatát. Feltéve, hogy  $\mathbf{A} \approx \mathbf{I}_S$  olyan értelemben is teljesül, hogy az első deriváltak szorzata jóval kisebb (lineáris leképezések normájában) a második deriváltaknál, (59)-ben csak a második deriváltas tagokat tartva meg:

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{h} \mathbf{A}^{-1} \text{tr}_{1,2} [\mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} (\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{A})] \mathbf{A}^{-1} - 2\mathbf{h} \mathbf{A}^{-1} \text{tr}_{2,4} [(\mathbf{A} \otimes \nabla \otimes \nabla) \mathbf{h}^{-1}] - \quad (60) \\ & - 2[\nabla \otimes (\nabla \cdot \mathbf{A})] \mathbf{A}^{-1} + 2\text{tr}_{1,2} [\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \otimes \nabla \otimes \nabla)] \approx \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ebbe  $\mathbf{A} \approx \mathbf{I}_S$ -et közvetlenül is behelyettesítve,

$$2\mathbf{h} \operatorname{tr}_{1,2} [\mathbf{h}^{-1} (\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{A})] - 2\mathbf{h} \operatorname{tr}_{2,4} [(\mathbf{A} \otimes \nabla \otimes \nabla) \mathbf{h}^{-1}] - \quad (61)$$

$$-2[\nabla \otimes (\nabla \cdot \mathbf{A})] + 2\operatorname{tr}_{1,2} [(\mathbf{A} \otimes \nabla \otimes \nabla)] \approx \mathbf{0}.$$

Ez a formula már lineáris  $\mathbf{A}$ -ban. Behelyettesítve (54)-et, az — ezúttal egyszerű — technikai lépések mellőzésével, arra juthatunk, hogy

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}} \times \nabla \approx \mathbf{0}, \quad (62)$$

amely a CAUCHY-deformációtenzorra ismert SAINT-VENANT-féle kompatibilitási feltétel.

A véges deformáltság (59) kompatibilitási feltétele eléggé bonyolult. Szerencsés lenne valami technikailag egyszerűbb jellemzését adni az általa megengedett rugalmas alaktenzoroknak. Ehhez fogódzót nyújt az, hogy a nulla görbületű  $\tilde{\mathbf{g}}$  metrikának az  $\bar{r}_t$  izometria egy metrikus segédpotenciálja. Tekintve, hogy  $\bar{t}$  és egy tetszőleges  $t$  egyaránt háromdimenziós euklideszi affin terek, megadható köztük izometria, így izometriák kompozíciójaként  $\tilde{\mathbf{g}}$ -nak megadható egy  $\hat{r}_t$  izometriája is. Ez, a 134. oldalon említettek szerint a  $t$  euklideszi affin térben ható eltolások és forgatások erejéig határozatlan függvényértékében. Ez az  $\hat{r}_t$  nem egy valódi, fizikai, realizálódó közegmozgást jelöl, hanem csak egy technikai segédmennyiség, melynek választása jelentős önkényt tartalmaz<sup>52</sup>. Az, hogy ez az  $\hat{r}_t$  ál-mozgás  $\tilde{\mathbf{g}}$ -nak metrikus segédpotenciálja, azaz a  $\mathbf{h}$  metrikájú sík  $t$ -vel kapcsolatot létesítő izometriája, azt jelenti, hogy

$$\tilde{\mathbf{g}} = (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla}) \quad (63)$$

[ld. (43), és vegyük észre eme (63) képletünk analógiáját (45)-tel is]. Helyettesítsük ennek inverzét be (50)-be:

$$\mathbf{A} = (r_t \otimes \tilde{\nabla}) (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \mathbf{h}^{-1} [(\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1}]^* (r_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h}, \quad (64)$$

melyet átírhatunk az

$$\mathbf{A} = [(r_t \circ \hat{r}_t^{-1}) \otimes \nabla] \mathbf{h}^{-1} [(r_t \circ \hat{r}_t^{-1}) \otimes \nabla]^* \mathbf{h} \quad (65)$$

alakba is. Önként kínálkozik tehát, hogy bevezessük a

$$q_t := r_t \circ \hat{r}_t^{-1} \quad (66)$$

kombinációt, mely a  $t$  affin térből képez önmagába — és amely függvény a „hasában” az eltolások és forgatások erejéig határozatlan.  $\mathbf{A}$  megadható tehát egy ilyen függvény

<sup>52</sup> Olyannyira, hogy a  $t$  változóban nem is kell, hogy folytonos legyen: különböző időpillanatokhoz egészen különböző módon is megválaszthatóak. Természetesen célszerű mégis időben elegendően sokszor differenciálhatónak választani — ez lehetséges, mert  $\tilde{\mathbf{g}}$  az idő függvényében simán változik, konkrétan a rugalmas alakváltozások körében állandó.

segítségével. Felismerve azt a lehetőséget, hogy az affin tér értékű  $q_t$ -ből levonhatjuk a  $t$  affin tér  $I_t$  identitásleképezését, és így egy egyszerűbb, vektortér értékű leképezést kapunk —  $\mathbf{S}$  értékűt, hiszen ez  $t$  alulfekvő vektortere —, definiálható

$$\mathbf{q}_t := q_t - I_t \quad (67)$$

is, mely tehát egy térszerű vektormezőt jelent a téridőn, és akivel

$$\mathbf{A} = (\mathbf{q}_t \otimes \nabla) \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{q}_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h} \quad (68)$$

írható. Egy téridő-koordinátázásban  $\mathbf{A}$ -nak hat független komponense van,  $\mathbf{q}$ -nak három, tehát  $\mathbf{q}$  egy gazdaságosabb technikai segédjellemezését nyújtja a rugalmas alaknak, mint  $\mathbf{A}$ . Tudnunk kell viszont róla, hogy  $\mathbf{q}$  eltolásnyi-elforgatásnyi határozatlanságot hordoz, közvetlen jelentése nincs. A *vektori alakpotenciál* névvel illethetjük,  $q$ -t pedig *affin alakpotenciál* névvel.  $\mathbf{q}_t \otimes \nabla \approx \mathbf{I}_S$  esetén  $\mathbf{A} \approx \mathbf{I}_S$ , és (68) első rendig az

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{I}_S + (\mathbf{q}_t \otimes \nabla) + \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{q}_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h}, \quad (69)$$

$$\mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}} \approx \frac{1}{2} [(\mathbf{q}_t \otimes \nabla) + \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{q}_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h}] \quad (70)$$

kis deformáltsági képleteket nyújtja.  $\mathbf{q}_t$  tehát a véges deformációs változata a CAUCHY-deformációtenzorhoz

$$\mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}} = \frac{1}{2} [(\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}} \otimes \nabla) + \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}} \otimes \nabla)^* \mathbf{h}] \quad (71)$$

módon tartozó  $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$  CAUCHY-potenciálnak [FÜLÖP (2009)], melyet tévesen azonosítani szoktak a (2)-ben bevezetett  $\mathbf{u}$  elmozdulásfüggvénnyel {nemnulla kezdeti deformáció esetén ugyanis a kettő menthetetlenül eltér egymástól [FÜLÖP (2009)], ezenfelül  $\mathbf{u}^{\text{CAUCHY}}$  eltolások és forgatások erejéig határozatlan (ld. ugyanott)}.

Adott  $\tilde{\mathbf{g}}$  alapszerkezet esetén a lehetséges  $\hat{r}_t$  metrikus segédpotenciálok, avagy adott  $\mathbf{A}$  alaktenzor esetén a lehetséges  $\mathbf{q}$  alakpotenciálok meghatározása kemény nemlineáris feladat. Gyakorlati szempontból, alkalmazásokban azonban a fordított út az érdekes: az összes lehetséges  $\mathbf{q}$ -kkal az összes lehetséges  $\mathbf{A}$ -kat — és az  $r$  mozgás ismeretében  $\tilde{\mathbf{g}}$ -t — jellemezni tudjuk. Tény, hogy egy  $\mathbf{q}_{t_0}$  kezdeti feltétel meghatározása szintén nem egyszerű, pláne annak fényében, hogy  $\mathbf{q}$  nem egy közvetlen fizikai mennyiség, hanem egy határozatlanságokat tartalmazó segédmennyiség. Mégis lehet, hogy könnyebben boldogulunk vele alkalmazásokban. Emellett, a kezdeti feltétel-célra történő felhasználáson túl egy konkrét kontinuumfizikai feladat egyenletrendszerének megoldásában is hasznos technikai szerepet játszhat, mert kevesebb szabadsági fokot kell nyomon követni a megoldás során, és az  $\mathbf{A}$ -ban lévő független szabadsági fokok explicitebben mutatkoznak meg  $\mathbf{q}$  nyelvén. Az alakpotenciállal való bánásmódhoz azonban szem előtt kell tartani azokat a korlátozó aspektusokat, melyek a CAUCHY-potenciálra ismeretesek [FÜLÖP (2009)]. Így például  $q$  nem fogható fel, mint az  $r$  közegmozgás, sőt, viszonyuk is nemtriviális.

### 7.3. A DEFORMÁLTSÁGTENZOR DEFINÍCIÓJA ÉS TULAJDONSÁGAI

A fizikai szempontjaink alapján közvetlenül adódott kinematikai jellemző alaktenzor lett, mely a nyugalmi állapotban egységtenzor, nem pedig deformáltságtenzor, mely a nyugalmi állapotban nulla lenne. Deformáltságtenzort úgy kaphatunk belőle, ha egy valamilyen függvényét vesszük, egy olyan függvényét, mely nulla, ha  $\mathbf{A}$  az egységtenzor. Emellett olyan kellene legyen, hogy kis deformáltság esetén az  $\mathbf{E}^{\text{in. CAUCHY}}$  tenzort kapjuk vissza. Ezt a kívánalmat most már  $\mathbf{A}$ -nyelven is meg tudjuk fogalmazni: (54) alapján vezető rendben  $\frac{1}{2}(\mathbf{A}_{r_t} - \mathbf{I}_S)$  kellene legyen deformáltságtenzorunk ebben a határesetben.

Ezek az előírások még rengeteg lehetőséget megengednek. Mivel  $\mathbf{A} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$  típusú, ezért hatványai, exponenciális és logaritmusfüggvénye, és minden olyan  $f$  függvénye értelmes, amely valós számokra értelmes. Mindezek a függvények pedig esetünkben egyszerűen úgy hatnak, hogy  $f(\mathbf{A})$  főirányai (sajátvektorai) megegyeznek  $\mathbf{A}$  főirányaival, a sajátértékekhez pedig  $\mathbf{A}$  sajátértékeinek  $f$  függvényét kell venni.

Óriási fizikai elvi kifejezőerővel és egyben gyakorlati értékkel rendelkezne egy olyan választás, amellyel a deformáltságtenzor nyoma mérné a tágultságot, és így deviatorikus része az állandó térfogatú deformálódásokkal lenne kapcsolatos. A 105. oldalon vetődött fel ez a kérdés a hagyományos, referencia-konfigurációhoz viszonyító deformációtenzorokra, és azt kaptuk, hogy a logaritmikus, HENCKY-féle tenzorok rendelkeznek ilyen tulajdonsággal. A (15)–(16) képletek  $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$  típusú tenzorokra is alkalmazhatóak, és (55)-nél láttuk, hogy  $\sqrt{\det \mathbf{A}}$  írja le a kiterjedtséget. Ezért referencia-konfigurációtól mentes, és a többi problémától is megtisztított tárgyalásunkban is megkapjuk a választ: a

$$\mathbf{D} := \ln \sqrt{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{A} \quad (72)$$

*deformáltságtenzor* az, amelynek nyoma,

$$\text{tr} \mathbf{D} = \ln \sqrt{\det \mathbf{A}} \quad (73)$$

közvetlenül a kiterjedtség függvénye, azaz a 138. oldalon elindított  $\theta$  jelölést szilárd közegek esetén képletszerű tartalommal töltve föl,

$$\theta := \ln \Lambda, \quad \text{vagyis} \quad \theta = \text{tr} \mathbf{D} = \ln \sqrt{\det \mathbf{A}} = \ln \Lambda. \quad (74)$$

Deformáltságtenzorunk tehát a bal HENCKY-tenzor szempontjaink szerint „rendbetett” változata.

Örvendetes észrevenni, hogy azt a 104. oldalon megfogalmazott reményt is teljesíti  $\mathbf{D}$ , miszerint olyan deformáltságtenzor volna kívánatos, mely mind a végtelenül kitérő, mind a végtelenül összenyomott közeg határesetében divergál.<sup>53</sup> Az, hogy mennyiségünk

<sup>53</sup>  $\mathbf{D}$  ezt ugyebár nyomának  $+\infty$ -hez illetve  $-\infty$ -hez tartásával láthatóan biztosítja.



divergál, amikor a közeg a kétfajta extrém geometriai állapot bármelyike felé közeledik, várhatóan numerikus stabilitást is nyújt majd konkrét feladatmegoldásokban: nem engedni, hogy a közelítő számítások hibái bármelyik irányba is elszaladhassanak, mert erős dinamikai visszatérítést (pl. erős visszatérítő feszültséget) fognak maguk után vonni a konstitúciós összefüggésen keresztül.

Megjegyzendő még, hogy kellemes volna, ha nemcsak  $\mathbf{A}$ -ra, hanem közvetlenül  $\mathbf{D}$ -re is le lehetne vezetni fejlődési egyenletet. Sajnos, mivel egy tenzor és időderiváltja általában nem cserélhetőek föl egymással, ezért ilyen levezetésre nincs mód.  $\mathbf{A}$  fejlődési egyenletét kell használni, és annak megoldásából származtatni  $\mathbf{D}$ -t. Lehet azonban, hogy  $\mathbf{D}$  még így is, azaz ennek ellenére is kitüntetett viszonyban áll a fejlődési egyenlettel — lásd a következő bekezdés végét.

$\mathbf{D}$ -definícióink alapvetően kinematikai előnyei után néhány dinamikai illetve konstitúciós előny is megemlíthető. Ezek közül az első az, hogy a legegyszerűbb termodinamikai szabadenergia épp ebben az általánosított bal HENCKY-tenzorban bizonyul kvadratikusnak [VÁN (2009)]. Ez a (72) deformáltságtenzor fizikai modellezésben való kitüntetett szerepére utal. Ennek a számolásnak a részletei itt nem kerülnek bemutatásra, a döntő mozzanata azonban igen: a termodinamikai levezetés során a főszerepet játszó tag a  $2\mathbf{A} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{A}}$  kombináció formájában adódik (ahol  $s$  az entrópiasűrűség), és vegyük észre, hogy ez a tag a (72) definíció következtében a  $\frac{\partial s}{\partial \mathbf{D}}$  egyszerű formát ölti. A szóbanforgó kombináció egyébként amiatt alakul ki, amilyen konkrét speciális módon  $\mathbf{v} \otimes \nabla$  szerepel  $\mathbf{A}$  fejlődési egyenletében. Ezért vélhető, hogy a logaritmikus definíciójú  $\mathbf{D}$  kitüntetett módon illeszkedik az alak fejlődési egyenletéhez is, és az alapvetően fontos  $\mathbf{v} \otimes \nabla$  mennyiséghez is.

Ezzel az elméleti észrevétellel párhuzamosan, kísérleti implikációk is vannak arra, hogy a lineáris rugalmasság  $\mathbf{D}$ -ben lehet a leglineárisabb. Gumira végzett nagydeformációs laboratóriumi kísérletek adatainak elemzése során erre a következtetésre jut HORGAN és MURPHY [HORGAN–MURPHY (2009)].

A 104. oldalon már megemlített eredmények [PLEŠEK–KRUIŠOVÁ (2006)], [KRUIŠOVÁ–PLEŠEK (2007)] szerint pedig nemlineáris rugalmasságtani konstitúciós összefüggés változójaként is jobban teljesít a HENCKY-tenzor más deformációtenzoroknál, sőt, az anyagi együttthatók illesztésében jobb numerikus stabilitást biztosít.

Természetesen számos további szisztematikus vizsgálat szükséges ahhoz, hogy megismerjük  $\mathbf{D}$  tulajdonságait, elméleti és kísérleti egyaránt.

## 8. A KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁSOK LEÍRÁSA

A szilárd közegek rugalmas alakváltozásainak imént felépített tárgyalása fényében

természetes módon kínálkozik a képlékeny alakváltozások 111. oldalán megvizsgált fizikai jellegzetességeinek formai megfogalmazása is. A képlékenyedés a  $\tilde{\mathbf{g}}$  alapszerkezet időbeli változásával írható le. A pillanatnyi,  $t$  pillanatbeli  $\tilde{\mathbf{g}}_t$  változási gyorsasága,  $\dot{\tilde{\mathbf{g}}}_t$  fejezi ki a képlékenyedés sebességét és módját (tenzori mennyiség időderiváltja nemcsak nagyságbeli változást fejez ki, hanem a változás irányfüggő jellegzetességeit is). Amikor a kinematikai mennyiségek felhasználásával dinamikai és konstitúciós összefüggéseket állítunk majd fel a közegre, a képlékenyedést okozó-vezérlő hatások ezt a  $\dot{\tilde{\mathbf{g}}}$  mennyiséget kell, hogy megszabják.

Két nehézség merül fel azonban  $\dot{\tilde{\mathbf{g}}}$  szerepeltetése kapcsán. Az egyik az, hogy  $\tilde{\mathbf{g}}$  nem érhető el közvetlenül kinematikai mérések révén. A rugalmas alakváltozásoknál erre szerepsére nem is volt szükség, a téridőn megfogalmazott  $\mathbf{A}$  kifejezett, hordozott mindent, amire szükségünk van. Kellene keresni egy téridőn megadott mennyiséget a képlékenyedési sebesség kifejezésére is. A másik nehézség pedig az, hogy  $\dot{\tilde{\mathbf{g}}}$  nem lehet akármilyen, mert az alapszerkezet továbbra is minden egyes pillanatban azt jelenti, hogy ha attól a pillanattól kezdve engedjük a közeget, hogy kirúgja magát és megkereshesse nyugalmi elrendeződését, akkor erre az akkori távolságviszonyra, metrikus szerkezetre fog törekedni. A változó  $\tilde{\mathbf{g}}$  tehát továbbra is minden pillanatban nulla RICCI-tenzorú kell legyen. Láthatunk, hogy a RICCI-tenzor nulla volta egy igencsak komplikált követelmény [ld. az (59) kompatibilitási feltételt, amivel analóg a  $\tilde{\mathbf{g}}$ -ra vonatkozó egyenlet]. A gyakorlat számára igencsak nehéz lenne olyan dinamikai ill. konstitúciós képleteket felírni, amelyek ezt a feltételt tiszteletben tartják. E célból értékes lenne egy olyan mennyiséget találni, amely csak azokhoz az alapszerkezet-változásokhoz tartozik, amelyek megőrzik a görbület nulla voltát. Hogy pedig az előbbi kívánalomnak is eleget tegyünk, ez a mennyiség legyen téridőn megadott.

Hogy milyen mennyiségben is gondolkodjunk, vegyük szemügyre az (52) egyenletet, amely képlékenyedésmentes esetben a szilárd közeg kinematikai differenciálegyenlete. Ezt (50) időderiváltjából származtattuk. Képlékenyedés esetén ez a derivált kibővül egy további taggal:

$$\dot{\mathbf{A}}_{r_t} = (\mathbf{v}_t \otimes \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{g}}^{-1} (r_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} + (r_t \otimes \tilde{\nabla}) (\dot{\tilde{\mathbf{g}}}^{-1}) (r_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} + (r_t \otimes \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{g}}^{-1} (\mathbf{v}_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h}. \quad (75)$$

A (63) egyenlet már megfogalmazta számunkra a nulla görbületű nyugalmi metrikákat, az  $\hat{r}$  ál-mozgások segítségével, ahonnan az extra tag ((75) jobb oldalán a középső tag) a következőképpen is kifejezhető:

$$\begin{aligned} & - (r_t \otimes \tilde{\nabla}) (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \mathbf{h}^{-1} \left[ (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \right]^* (r_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} - \quad (76) \\ & - (r_t \otimes \tilde{\nabla}) (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \mathbf{h}^{-1} \left[ (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \right]^* \left[ (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \right]^* \left[ (\hat{r}_t \otimes \tilde{\nabla})^{-1} \right]^* (r_t \otimes \tilde{\nabla})^* \mathbf{h} = \\ & = - (q_t \otimes \nabla) \left\{ \left[ (\hat{r}_t \circ \hat{r}_t^{-1}) \otimes \nabla \right] \mathbf{h}^{-1} + \mathbf{h}^{-1} \left[ (\hat{r}_t \circ \hat{r}_t^{-1}) \otimes \nabla \right]^* \right\} (q_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Ez egy tanulságos és értékes alak, viszont nem elegendően praktikus. Ezért fussunk neki a dolognak egy kerülő úton is. Időderiváljuk (65)-öt, melybe előbb beírtuk (66)-ot:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}} &= (\dot{q}_t \otimes \nabla) \mathbf{h}^{-1} (q_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h} + (q_t \otimes \nabla) \mathbf{h}^{-1} (\dot{q}_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h} = \\ &= (\dot{q}_t \otimes \nabla) (q_t \otimes \nabla)^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} [(\dot{q}_t \otimes \nabla) (q_t \otimes \nabla)^{-1}]^* \mathbf{h} = \\ &= [(\dot{q}_t \circ q_t^{-1}) \otimes \nabla] \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} [(\dot{q}_t \circ q_t^{-1}) \otimes \nabla]^* \mathbf{h} =\end{aligned}\quad (77)$$

$$= (\mathbf{v}_t \otimes \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} (\mathbf{v}_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h} - (\mathbf{Z} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{h}), \quad (78)$$

ahol

$$\mathbf{Z} := \mathbf{v}_t \otimes \nabla - (\dot{q}_t \circ q_t^{-1}) \otimes \nabla = [\mathbf{v}_t - (\dot{q}_t \circ q_t^{-1})] \otimes \nabla, \quad (79)$$

melyre definíciója alapján nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$(\mathbf{Z} \otimes \nabla)^{\text{A}_{2,3}} = \mathbf{0}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{Z} \times \nabla = \mathbf{0}, \quad (80)$$

vagyis hogy második tenzori komponensében („indexében”) örvénymentes. Ezen a második úton tehát a  $-(\mathbf{Z} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{h})$  alakban tudtuk felírni azt az iménti extra közepső tagot. A

$$\mathbf{w}_t := \mathbf{v}_t - (\dot{q}_t \circ q_t^{-1}) \quad (81)$$

jelöléssel  $\mathbf{Z} = \mathbf{w} \otimes \nabla$  írható röviden. Erre a  $\mathbf{w}$ -re már nem mutatkozik semmilyen feltétel<sup>54</sup>, tehát a jelek szerint az összes lehetséges (kellően sokszor deriválható)  $\mathbf{w}$  görbületörző alapszerkezet-változást jelent. Az sajnos nem igaz, hogy különböző  $\mathbf{w}$ -k különböző  $\check{\mathbf{g}}$ -okat szolgáltatnak. Az  $\hat{r}$  ál-mozgások már említett eltolásnyi és forgatásnyi határozatlanságai közül az eltolások a térderiválás miatt kiesnek  $q$ -ból és így  $\mathbf{w}$ -t is invariánsan hagyják, a forgatások azonban nem. Fontos és nyitott kérdés, hogy van-e olyan mennyiség, amely mind az eltolásokra, mind a forgatásokra invariáns, és így kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban van a görbületörző alapszerkezet-változásokkal. Ehhez egy adalék az, hogy a (76)-ban felbukkanó  $\mathbf{h}$ -szimmetrikus  $\left[ (\hat{r}_t \circ \hat{r}_t^{-1}) \otimes \nabla \right] \mathbf{h}^{-1} + \mathbf{h}^{-1} \left[ (\hat{r}_t \circ \hat{r}_t^{-1}) \otimes \nabla \right]^*$  kombináció invariáns az eltolásokra és a forgatásokra egyaránt. Sajnos, ő viszont kevés ahhoz, hogy a képlékenyedés miatti extra tagot, azaz a  $\mathbf{Z} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{h}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{h}$  kombinációt megkapjuk belőle: (76)-ból leolvasható, hogy ehhez  $q_t \otimes \nabla$ -t is ismernünk kellene még (amely mennyiség viszont nem forgatásinvariáns).

Nos, a megengedett alapszerkezet-változások egyik lehetséges módja tehát egy  $\mathbf{w}$  megadása (értsd: konstitúciósan vagy dinamikailag). Ez már egy jóval egyszerűbb feladat, mint az eredeti. Az ál-mozgás forgatásnyi határozatlanságára azonban invariánsnak kell lennie ennek a megadásnak (amikor nem explicite, egy  $\mathbf{w} := \dots$  módon<sup>55</sup>, hanem pl. egy

<sup>54</sup> Az tudható, hogy  $\dot{q}_t \circ q_t^{-1}$  is  $V(1)$  értékű, azaz négyessebesség-mező, így  $\mathbf{w}$   $\mathbf{S}/\mathbb{T}$  értékű.

<sup>55</sup> Egy ilyen explicit megadásban szerepelhet HEAVISIDE-féle egységugrásfüggvény-szerű szorzó is, amely bekapcsolja a képlékenyedést, ha pl. nő a rugalmas energia, és már át is lépett egy kritikus értéket, és kikapcsolja, ha csökken.

termodinamikai potenciál változójaként ONSAGERI egyenletet származtatunk rá: az ilyen potenciáloknak invariánsoknak kell lenni  $\mathbf{w}$ -nek az ál-mozgás forgatásaiból származó transzformációira), ami még szintén egy nemtriviális kívánalom. A helyzet tehát itt nem lezárt, további fejlesztésekre vár.

Zárásul érdemes megnézni a kis rugalmas deformáltság határesetét.<sup>56</sup>  $\mathbf{A} \approx \mathbf{I}_S$  esetén

$$\dot{\mathbf{A}} \approx (\mathbf{v}_t \otimes \nabla) + \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{v}_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h} - \mathbf{Z} - \mathbf{h}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{h}, \quad (82)$$

így  $\mathbf{D} \approx \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_S)$ ,  $\dot{\mathbf{D}} \approx \frac{1}{2}\dot{\mathbf{A}}$  behelyettesítésével

$$\frac{1}{2} [(\mathbf{v}_t \otimes \nabla) + \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{v}_t \otimes \nabla)^* \mathbf{h}] \approx \dot{\mathbf{D}} + \frac{1}{2} [\mathbf{w} \otimes \nabla + \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{w} \otimes \nabla)^* \mathbf{h}]. \quad (83)$$

Ezt felintegrálva időben egy referencia- $t_0$ -tól  $t$ -ig, olyan képletet kapunk, amely „össz-deformáció = rugalmas deformáció + képlékeny deformáció” módon interpretálható. Itt azonban a deformációk *változások*: a bal oldalon a referencia-időponttól mért elmozdulás térderiváltja bukkan föl, a jobb oldal első tagjában a rugalmas deformáltság megváltozása, a második tagban pedig  $\mathbf{w}$  időintegrálja („képlékeny elmozdulás”) szerepel egy ugyanilyen térderiváltas szerkezetben („képlékeny deformáció”).

## 9. TOVÁBBI TENNIVALÓK

A szilárd közegek rugalmas alakváltozásainak kinematikája terén a logaritmikus definíciójú, általánosított bal HENCKY-deformációtenzor elvi (dinamikai-termodinamikai) és kísérleti szempontokból kitüntetett volta további vizsgálatok tárgya kell legyen. Megjegyzendő, hogy az eddigi jelek szerint ez a — további bevont fizikai szempontok alapján bevezetett — tenzor kielégítőbb, mint a [FÜLÖP (2008b)] munkában javasolt együttforgó deformáltságtenzor {érdekes észrevétel, hogy e két tenzor számértékileg a deformáltság négyzete rendjéig egyezik [FÜLÖP (2008b)]}.

Az itt bemutatott, téridő-alapú kinematika általánosítandó mikropoláros közegek esetére is, ott ugyanis mikro- és makro-szintű mozgások is vannak, melyek inkorrekt tárgyalása »megduplázza« az elkövetett fizikai hibák számát az egyszerű kontinuumokhoz képest, és égető szükség van a megbízható kinematikai alapra [PIETRASZKIEWICZ–EREMEYEV (2009)].

Folyadékokra rugalmas deformáltság nincs, csak rugalmas tágultság van: fel kell állítani a tágultság-alapú folyadékkinematikát. Az anyagi sokaság mellőzése a leírásból itt olyan szempontból is fontos, hogy a turbulens áramlások esetén a sebességmező differenciálhatósága, a közegpontok világvonalainak differenciálhatóságának rendje is kérdéses.

<sup>56</sup> A képlékeny deformáltság kicsiségét nem tesszük fel, hiszen tudjuk: nincs is értelme képlékeny deformáltságnak, nincs ilyen állapotjelző mennyiség. Semmi képlékenyedéssel kapcsolatos feltevésre nem is lesz szükség a most következő levezetésben.

Gázok esetén pedig már rugalmas tágultság sincs, és az áramlás még könnyebben válik kuszává (turbulenssé), mint folyadékokra. Ezért folyadékok és gázok esetén a mérleg-egyenletek, és például a feszültségtenzor téridő-alapú értelmezése is nemtriviális lehet. Ide kapcsolódik az is, hogy a mozgási energia és a belső energia téridőbarát értelmezése is elkerülhetetlenül szükséges. A közegforgás, a szögsebesség kérdésének tisztázása is hátra van még, mely folyadékok és gázok esetén különlegesen akut feladat.

A szilárd közegeknél folytatni kell olyan mennyiség keresését, mely határozatlan-ságok nélkül, vagy legalább valamilyen jól kezelhető módon jellemzi a görbületörző alapszerkezet-változásokat (képlékenyedési lehetőségeket). Az eddigi és az esetleges jövőbeli új mennyiségekre alapozva kiépítendő a képlékenység termodinamikai alapú dinamikája, a [VÁN (2010a)] írásban bemutatott irányvonal folytatásaként. Speciálisan, a reológia is átértékelendő a jelen kinematikai keret fényében.

A deformáltság térderiváltját is tartalmazó rugalmasságtan termodinamikai tárgyalása [VÁN (2010b)] is megismételendő a téridőbarát mennyiségek nyelvén, rendezve így azt a nyugtalanító jelenlegi helyzetet, amely az anyagi objektivitás elvének különböző értelmezései és az ezekből származtatott különböző konstitúciós és dinamikai egyenletek kapcsán fennáll.

Az elvi-lényegi megfogalmazás fejlesztésével párhuzamosan felállítandóak alkalmazássegítő, technikailag könnyen kezelhető átfogalmazások, melyek a konkrét analitikus és numerikus, pl. végeselemes feladatmegoldásokat segítik. Számos konkrét példa végig is számolandó, tanulmányozva a különbségeket, amelyek a megbízható új kinematikai mennyiségek használata és az eddig szokásosaké között fellépnek. A kidolgozott példák alapján elvégzendő ismert és új, célzatosan nyert kísérleti adatok kiértékelése az új és az eddigi mennyiségek nyelvén egyaránt.

## KÖSZÖNETMONDÁS

A szerzők köszönetet mondanak Asszonyi Csabának és Lámer Gézának értékes előszóbeli és a [LÁMER (2009)] írásban kifejtett meglátásaikért-észrevételeikért, és Matolcsi Tamásnak a hasznos és fontos diszkusszióikért. Jelen munkát az OTKA K81161 számú pályázata támogatta.

## IRODALOM

- ARNOLD, V.I. (1974): *Matyematyícseszkije metódü klasszícieszkoj mehányiki*, Nauka, Moszkva (oroszul). Magyar fordítás: *A mechanika matematikai módszerei*, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, 1985.
- ASSZONYI, Cs. – VÁN, P. – SZARKA, Z. (2007): Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5*, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- BERTRAM, A. (2005): *Elasticity and plasticity of large deformations*, Springer, Berlin-Heidelberg.
- BLOCH, A. (1985): *Murphy törvénykönyve, avagy miért romlik el minden?* *Gondolat Könyvkiadó*, Budapest.
- DIEUDONNÉ, J. (1976): *Grünzüge der modernen Analysis 4*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- FIZIKAI NOBEL-DÍJ SAJTÓKÖZLEMÉNY (1993): [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1993/press.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1993/press.html).
- FÜLÖP, T. (2008a): A tér nem abszolút — a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye. In: FÜLÖP, T. (szerk.), *Új eredmények a kontinuumfizikában*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8*, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- FÜLÖP, T. (2008b): *Kontinuumok kinematikájának új értelmezése*. In: FÜLÖP, T. (szerk.), *Új eredmények a kontinuumfizikában*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 8*, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- FÜLÖP, T. (2009): *Rugalmasságtani és reológiai lineáris feladatok*. In: ASSZONYI, Cs. (szerk.), *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9*, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- FÜLÖP, T. – BÉDA, Gy. (2009): *Hidrosztatikus környezetben nyitott hengersizmetrikus alagút körüli reológiai időfüggés*. In: ASSZONYI, Cs. (szerk.), *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9*, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.
- FÜLÖP, T. – VÁN, P. (2009): *Finite strain tensors: which one to use?* Előadás az ESMC2009 konferencián (7th EUROMECH Solid Mechanics Conference), Lisbon, Portugal, September 7–11, 2009. A konferenciakiadvány csak az előadás kivonatát tartalmazza.
- HORGAN, C.O. – MURPHY, J.G. (2009): *A generalization of Hencky's strain-energy den-*

- sity to model the large deformations of slightly compressible solid rubbers, *Mechanics of Materials* **79**, 943–950.
- GALILEI, G. (1632): *Dialogo*, Gio. Battista Londini, Firenze (olaszul); magyar fordítás: Párbeszédék, *Kriterion Könyvkiadó*, Bukarest, 1983; pp151–153.
- HAUPT, P. (2002): *Continuum mechanics and theory of materials*, 2nd ed., Springer, Berlin–etc.
- INDEX.HU (2009-10): újsághírek: [http://index.hu/kulfold/2009/07/20/leallt\\_az\\_s-bahn\\_berlinben](http://index.hu/kulfold/2009/07/20/leallt_az_s-bahn_berlinben) , [http://index.hu/kulfold/2010/01/29/kedvezmenyeket\\_kapnak\\_a\\_berlini\\_gyorsvasut\\_utasai](http://index.hu/kulfold/2010/01/29/kedvezmenyeket_kapnak_a_berlini_gyorsvasut_utasai) .
- JAGLOM, I.M. (1969): Princip atnaszítyelosztyi Galileja i neevklídava geometrija, *Nauka*, Moszkva (oroszul). Magyar fordítás: Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria, *Gondolat Könyvkiadó*, Budapest, 1985.
- KRUISOVÁ, A. – PLEŠEK, J. (2007): Constitutive model of acoustoelasticity for prestressed solids, talk at the conference Continuum Physics and Engineering Applications, 2007, Ráckeve, Hungary.
- LÁMER, G. (2009): Az anyagi viselkedés folytonos és diszkrét modellezésének kérdései. A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferenciára készített írásos előadás-változat. Várható megjelenése a konferenciakiadványban.
- MATOLCSI, T. (1984): A concept of mathematical physics. Models for spacetime, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- MATOLCSI, T. (1986): A concept of mathematical physics. Models in mechanics, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- MATOLCSI, T. (1993): Spacetime without reference frames, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.
- MEZEI, F. (2008): KFKI RMKI szeminárium, 2008. március 27.
- O'NEILL, B. (1983): *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, Volume 103, Academic Press, London.
- PIETRASZKIEWICZ, W. – EREMEYEV, V. A. (2009): On natural strain measure of the nonlinear micropolar continuum, *International Journal of Solids and Structures* **46**, 774–787.
- PLEŠEK, J. – KRUISOVÁ, A. (2006): Formulation, validation and numerical procedures for Hencky's elasticity model, *Computers and Structures* **84**, 1141–1150.
- POPPER, P. (1995): Belső utakon, *Türelem Háza Bt.*, 6. o.
- SIMONYI, K. (1978): A fizika kultúrtörténete, *Gondolat Kiadó*, Budapest.

- TRUESDELL, C. – NOLL, W. (1965): The non-linear field theories of mechanics, (Handbuch der Physik, III/3.) Springer Verlag.
- VÁN, P. (2009): Izotróp alakreológia, Montavid Termodinamikai Kutatócsoport kutatási jelentés.
- VÁN, P. (2010a): A képlékenységtan termodinamikai alapjairól. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Idő- és térderiváltak anyagtörvényekben, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **10**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)
- VÁN, P. (2010b): A harmadfokú, véges deformációs rugalmasságtan termodinamikai konzisztenciájáról. In: FÜLÖP, T. (szerk.), Idő- és térderiváltak anyagtörvényekben, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár **10**, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest. (Jelen kötetben.)



